

Avis technique

SSS-10

Direction de la recherche forestière

Titre :	Relations hauteur-diamètre, tarifs de cubage et équations de défilement pour l'épinette noire et le pin gris en plantation au Québec
Auteurs :	Isabelle Auger, M. Sc., Josianne DeBlois, M. Sc. et Marie-Claude Lambert, M. Sc.
Date :	Octobre 2025

La plantation est un pilier de l'aménagement forestier au Québec. Pour prévoir le rendement des plantations, notamment celles d'épinette noire et de pin gris, il est essentiel de disposer d'équations précises permettant d'estimer la hauteur, le volume total et le volume marchand des arbres. Ces outils sont indispensables pour une gestion efficace des ressources forestières et une planification optimale des récoltes. De nouvelles relations hauteur-diamètre, des tarifs de cubage et des équations de défilement pour l'épinette noire et le pin gris en plantation sont présentées.

1. Contexte

La plantation forestière est parmi les traitements sylvicoles les plus fréquemment appliqués au Québec, avec près de 130 millions de plants et plus de 75 000 hectares reboisés depuis 2020 (MRNF, 2024). Dans ce contexte, il est important d'estimer adéquatement le rendement des plantations, en particulier les plantations monospécifiques d'épinette noire (*Picea mariana* (Mill.) B.S.P. ; EPN) et de pin gris (*Pinus banksiana* Lamb. ; PIG). Pour ce faire, il est nécessaire de disposer d'équations pour estimer la hauteur et le volume total de chacun des arbres, de même que le volume marchand (volume à un diamètre au fin bout de 9 cm) ou le volume à diverses hauteurs le long de la tige. Pour l'EPN, les modèles de Prégent *et al.* (1996) étaient utilisés jusqu'à maintenant pour estimer la hauteur et les volumes total et marchand, mais il n'était pas possible d'estimer des volumes à d'autres hauteurs ou diamètres. Pour le PIG, les modèles de Prégent *et al.* (2001) étaient utilisés, et des équations de proportion du volume total permettaient d'estimer le volume à des diamètres et des hauteurs variables. Depuis, la Direction de la recherche forestière (DRF) a mis en place un réseau de suivi des effets réels des plantations, ce qui permet d'ajouter plusieurs observations à la base de données de ces deux essences et ainsi, de mettre à jour les équations.

2. Méthodologie

2.1. Données

Nous avons utilisé les données des études d'arbres plantés provenant du réseau de suivi des effets réels des plantations pour l'EPN et le PIG de la DRF. Ce réseau contient des placettes de 400 m² installées de 1995 à 1999 dans des plantations alors âgées de 6 à 13 ans. Ces placettes ont été mesurées en moyenne tous les 5 ans et suivies pendant un maximum de 25 ans au moment de cette étude. Dans ce réseau, de 1995 à 2004, la hauteur totale a été mesurée pour tous les arbres plantés et vivants dans les placettes. À partir de 2005, 14 études d'arbres ont été choisies dans chaque placette afin d'élaborer des relations hauteur-diamètre (H-DHP) et estimer la hauteur dominante. En général, la hauteur totale et le diamètre à hauteur de poitrine (mesuré à 1,3 m, DHP) ont été mesurés sur 14 arbres plantés sélectionnés comme suit : les 8 plus hauts arbres plantés faisant partie de l'étage des arbres dominants et bien répartis dans la placette (200 arbres/ha) et 6 arbres plantés choisis aléatoirement (2 dans l'étage des arbres codominants, 2 dans l'étage des intermédiaires et 2 dans l'étage des opprimés).

Pour le PIG, plus de 36 000 mesures de hauteur étaient disponibles dans 221 placettes provenant de 169 plantations établies avec une densité initiale de reboisement variant de 775 à 3 925 plants/ha; elles étaient âgées de 7 à 48 ans au début du suivi, et ont été mesurées de 1970 à 2018 (figure 1a). Pour l'EPN, plus de 56 000 mesures de hauteur étaient disponibles dans 397 placettes provenant de 297 plantations établies avec une densité de reboisement initiale variant de 1 300 à 4 350 plants/ha; elles étaient âgées de 6 à 52 ans au début du suivi, et ont été mesurées de 1984 à 2019 (figure 1b).

Pour élaborer des tarifs de cubage et des équations de défilement, de 1 à 16 arbres sélectionnés en périphérie de certaines placettes ont été abattus pour des études de défilement (en moyenne, 2 arbres pour le PIG et 4 arbres pour l'EPN). Ces arbres provenaient de toutes les classes de dominance du couvert, dans des placettes appartenant soit au réseau de suivi des effets réels, soit à un autre réseau de suivi des plantations de la DRF. Pour les plantations de PIG, les arbres abattus provenaient de 327 placettes dans 240 plantations âgées de 5 à 42 ans, pour un total de 586 arbres (figure 1a). Pour les plantations d'EPN, les arbres abattus provenaient de 140 placettes dans 65 plantations âgées de 7 à 31 ans, pour un total de 625 arbres (figure 1b). Le diamètre avec écorce et l'épaisseur d'écorce ont été évalués à des hauteurs de 15 cm, 45 cm, 85 cm, 130 cm et 200 cm du sol, et par intervalles de 1 m par la suite. À chacune de ces hauteurs, deux mesures de diamètre et d'épaisseur d'écorce ont été prises perpendiculairement, et leur moyenne géométrique a été calculée. Le volume de chaque section a été calculé avec l'équation d'un paraboloïde. Le volume total observé de la tige a été obtenu en additionnant les volumes de toutes les sections. La hauteur marchande a été interpolée entre les deux sections comprenant le diamètre marchand (9 cm). Le volume de cette section a été calculé en utilisant la hauteur marchande. Le volume marchand observé a été obtenu en additionnant toutes les sections marchandes.

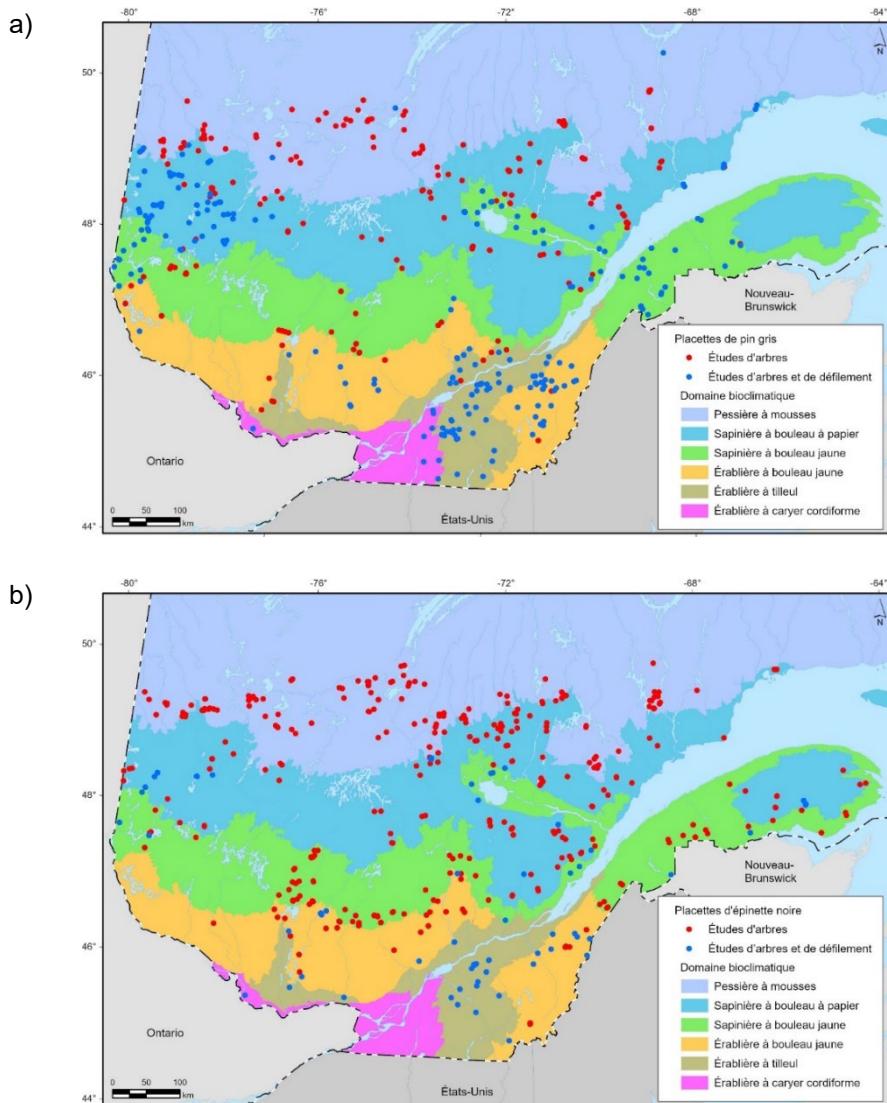


Figure 1. Carte montrant la répartition des placettes dans les plantations a) de pin gris et b) d'épinette noire. Les points bleus sont les placettes comprenant à la fois des études d'arbres et des études de défilement, tandis que les points rouges sont des placettes avec seulement des études d'arbres.

2.2. Méthodes

2.2.1 Relations hauteur-diamètre

Pour établir les modèles permettant d'estimer la hauteur d'un arbre, nous avons d'abord retenu les observations mesurées après 2004, soit à partir du moment où 14 arbres étaient suivis par placette. Nous avons ensuite ajouté les mesures précédentes de ces arbres, soit celles de 1995 à 2004. Nous avons ensuite sélectionné aléatoirement une mesure par arbre pour constituer le jeu de données de calibration, auquel nous avons ajouté les observations provenant des études de défilement. Les autres mesures de ces arbres ont constitué le jeu de données de validation. Pour le PIG, nous avions 3 735 mesures dans 512 placettes pour la calibration (figure 1a) et 7 642 mesures dans 201 placettes pour la validation (tableaux 1 et 2). Pour l'EPN, nous avions 6 160 mesures de hauteur dans 509 placettes pour le jeu de

données de calibration (figure 1b) et 13 767 mesures dans 361 placettes pour le jeu de données de validation (tableaux 1 et 2).

Tableau 1. Statistiques descriptives des arbres utilisés dans les modèles élaborés pour estimer la hauteur totale (jeu de données de calibration) pour le pin gris (PIG) et l'épinette noire (EPN) en plantation.

Essence	Variable	n*	Moyenne	Minimum	Maximum
PIG	Hauteur totale (m)	3 735	7,4	1,3	25,0
	DHP (cm)	3 735	9,3	0,3	34,8
	DHP moyen (cm)	837*	7,3	0,1	25,7
	DHP des arbres dominants (cm)	1 086	10,2	0,9	30,9
	Hauteur dominante (m)	1 086	8,0	1,6	23,8
EPN	Hauteur totale (m)	6 160	5,4	1,3	18,4
	DHP (cm)	6 160	6,9	0,2	27,0
	DHP moyen (cm)	1 607†	5,4	0,0	18,5
	DHP des arbres dominants (cm)	1 664	8,1	0,1	23,4
	Hauteur dominante (m)	1 664	6,3	1,2	17,8

* Dans le cas de la hauteur totale et du diamètre à hauteur de poitrine (DHP), n = nombre d'observations d'arbres. Dans le cas du DHP moyen, de la hauteur dominante et du DHP des arbres dominants n = nombre de mesures de placettes.

† La valeur de n est plus petite pour le DHP moyen que pour le DHP des arbres dominants, car la liste de l'ensemble des arbres n'est pas toujours disponible pour les études de défillement en périphérie des placettes.

Tableau 2. Statistiques descriptives des arbres utilisés pour évaluer les modèles de la hauteur totale (jeu de données de validation) pour le pin gris (PIG) et l'épinette noire (EPN) en plantation.

Essence	Variable	n*	Moyenne	Minimum	Maximum
PIG	Hauteur totale (m)	7 642	6,3	1,3	18,3
	DHP (cm)	7 642	7,9	0,3	25,7
	DHP moyen (cm)	843	7,0	0,0	19,5
	DHP des arbres dominants (cm)	843	9,5	0,2	23,8
	Hauteur dominante (m)	843	7,5	1,2	17,7
EPN	Hauteur totale (m)	13 767	5,5	1,3	15,8
	DHP (cm)	13 767	7,0	0,1	22,6
	DHP moyen	1 689	5,3	0,0	16,0
	DHP des arbres dominants (cm)	1 689	8,0	0,1	21,2
	Hauteur dominante (m)	1 689	6,2	0,9	14,9

* Dans le cas de la hauteur totale et du diamètre à hauteur de poitrine (DHP), n = nombre d'observations d'arbres. Dans le cas du DHP moyen, de la hauteur dominante et du DHP des arbres dominants, n = nombre de mesures de placettes.

Nous avons élaboré trois types de relations H-DHP. La première est une simple relation entre la hauteur totale et le DHP (section 2.2.1.1). Ce modèle estime la hauteur moyenne de la population pour un DHP donné.

Toutefois, ce premier type produit une forme de courbe qui est fort improbable lorsqu'il est utilisé comme une relation H-DHP propre à une placette. Dans un tel cas, il est plus approprié d'utiliser une relation H-DHP généralisée qui utilise des variables explicatives à l'échelle de la placette pour préciser la forme de la relation. Le second type de relation H-DHP (section 2.2.1.2) utilise donc seulement une agrégation de l'ensemble des DHP des arbres d'une placette (DHP moyen), information qui est toujours disponible dans un inventaire forestier.

Si des mesures de hauteur sont disponibles sur un sous-ensemble des arbres de la placette, comme sur des arbres dominants, la hauteur moyenne et le DHP moyen de ces arbres peuvent être ajoutés comme variables explicatives, ce qui correspond au troisième type de relation H-DHP (section 2.2.1.3).

2.2.1.1 Hauteur totale en fonction du DHP

Pour modéliser la relation entre la hauteur totale et le DHP, nous avons comparé 9 équations (tableau 3). Pour chaque essence, nous avons choisi l'équation de façon à minimiser la valeur du critère d'Akaike (AIC) et à maximiser l'ajustement du modèle sur les données de calibration et de validation. Pour tenir compte de l'hétérogénéité de la variance, nous avons utilisé une régression pondérée, en estimant le poids de chaque observation à partir d'une fonction de variance. Cette fonction a été ajustée sur l'ensemble des données disponibles (calibration et validation) en regroupant les observations par classe de DHP de 1 cm et en calculant la variance des hauteurs pour chacune de ces classes. Nous avons ensuite ajusté une équation polynomiale de degré 3 entre le DHP et la variance des hauteurs, puis utilisé cette fonction pour estimer le poids à accorder à chaque observation du jeu de données de calibration. L'ajout d'un effet aléatoire de placette pour tenir compte de la structure hiérarchique des données n'améliorait pas l'ajustement des modèles ; cet effet n'a donc pas été inclus. La forme générale du modèle est représentée par l'équation 1. Les équations ont été calibrées avec la procédure NLMIXED (SAS Institute Inc. 2013c) du logiciel SAS (SAS Institute Inc. 2013a).

$$H_{ij} = f(DHP_{ij}; \alpha) + \varepsilon_{ij} \quad \text{avec } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 / poids_{ij}) \quad (\text{équation 1})$$

$$poids_{ij} = 1/(p_1 DHP_{ij} + p_2 DHP_{ij}^2 + p_3 DHP_{ij}^3)$$

où H_{ij} et DHP_{ij} sont respectivement la hauteur totale (m) et le DHP (cm) de l'arbre j de la placette i ; α , σ^2 , p_1 , p_2 et p_3 sont des paramètres à estimer, et ε_{ij} est l'erreur résiduelle pondérée par le poids $poids_{ij}$.

Tableau 3. Équations testées pour modéliser la hauteur totale (H) d'un arbre à partir du diamètre à hauteur de poitrine (DHP). α_1 , α_2 et α_3 sont les paramètres à estimer.

Équation	Nom
$H = 1,3 + \alpha_1(1 - e^{-\alpha_2 DHP})^{\alpha_3}$	Chapman-Richards
$H = 1,3 + \alpha_1 DHP^{\alpha_2}$	Puissance
$H = 1,3 + \alpha_1(e^{\alpha_2/DHP})$	Schumacher
$H = 1,3 + \frac{DHP}{\alpha_1 + \alpha_2 DHP}$	Polynomiale inverse
$H = 1,3 + \alpha_1(1 - e^{-\alpha_2 DHP^{\alpha_3}})$	Weibull
$H = 1,3 + \frac{\alpha_1 DHP^{\alpha_3}}{\alpha_2 + DHP^{\alpha_3}}$	Hossfeld II
$H = 1,3 + \alpha_1 e^{(\alpha_3 - \alpha_2 DHP)}$	Gompertz
$H = 1,3 + \alpha_1(e^{-\alpha_2 DHP - \alpha_3})$	Korf
$H = 1,3 + \alpha_1 DHP + \alpha_2 DHP^2$	Quadratique

2.2.1.2 Hauteur totale en fonction du DHP et du DHP moyen dans une placette

Pour modéliser la hauteur totale en fonction du DHP et du DHP moyen, nous avons modifié les équations du tableau 3 en ajoutant le DHP moyen des arbres de la placette comme variable explicative à chacun des paramètres (équation 2) :

$$H_{ij} = f(DHP_{ij}, DMOY_i, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \varepsilon_{ij}, \text{ avec } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 DHP_{ij}^{\gamma}) \quad (\text{équation 2})$$

$$\alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11} DMOY_i$$

$$\alpha_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21} DMOY_i$$

$$\alpha_3 = \alpha_{30} + \alpha_{31} DMOY_i$$

où $DMOY_i$ est le DHP moyen de tous les arbres de la placette i .

En utilisant les meilleures équations du tableau 3, nous avons simplifié les paramètres α_1 , α_2 et α_3 des équations à l'aide du critère AIC. Pour chaque essence, nous avons ensuite choisi l'équation définitive en fonction de la valeur de l'AIC pour les données de calibration et en fonction de l'ajustement du modèle à la fois sur les données de calibration et de validation. Pour tenir compte de l'hétérogénéité de la variance, nous avons modélisé la variance des modèles en fonction du DHP. L'ajout d'un effet aléatoire de placette n'améliorait pas l'ajustement des modèles. Les équations ont été calibrées avec la procédure NLMIXED de SAS.

2.2.1.3 Hauteur totale en fonction du DHP et des caractéristiques des arbres dominants

Pour modéliser la hauteur totale en fonction du DHP et des caractéristiques des arbres dominants, nous avons modifié les équations du tableau 3 en ajoutant la hauteur moyenne des arbres dominants et le DHP moyen de ces mêmes arbres à chacun des paramètres (équation 3) :

$$H_{ij} = f(DHP_{ij}, HDOM_i, DDOM_i; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \varepsilon_{ij}, \text{ avec } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (\text{équation 3})$$

$$\alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11}HDOM_i + \alpha_{12}DDOM_i$$

$$\alpha_2 = \alpha_{20} + \alpha_{21}HDOM_i + \alpha_{22}DDOM_i$$

$$\alpha_3 = \alpha_{30} + \alpha_{31}HDOM_i + \alpha_{32}DDOM_i$$

où $HDOM_i$ et $DDOM_i$ sont respectivement la hauteur moyenne et le DHP moyen des arbres dominants de la placette i .

En utilisant les meilleures équations du tableau 3, nous avons simplifié les paramètres α_1 , α_2 et α_3 des équations à l'aide du critère AIC afin de ne conserver qu'une seule des deux variables $HDOM$ et $DDOM$ à la fois, de manière à éviter un problème de colinéarité. Pour chaque essence, nous avons ensuite choisi l'équation définitive en fonction de la valeur de l'AIC sur les données de calibration et en fonction de l'ajustement du modèle à la fois sur les données de calibration et de validation. L'homogénéité de la variance était respectée, et l'ajout d'un effet aléatoire de placette n'améliorait pas l'ajustement des modèles. Les équations ont été calibrées avec la procédure NLMIXED de SAS.

2.2.2 Tarifs de cubage

Pour étalonner les équations de volume total du PIG, notre jeu de données contenait peu de nouvelles observations comparativement au jeu de données utilisé dans Prégent *et al.* (2001) (tableau 4). Nous n'avons donc pas construit de nouvelles équations. Nous avons toutefois utilisé les équations et les paramètres de Prégent *et al.* (2001) pour évaluer la qualité de leur ajustement sur notre jeu de données.

Tableau 4. Statistiques descriptives des arbres utilisés pour les modèles pour estimer le volume total de l'épinette noire (EPN) et du pin gris (PIG) en plantation (n = nombre d'arbres).

Essence	Variable	n	Moyenne	Minimum	Maximum
PIG	Hauteur totale (m)	586	10,3	2,1	20,1
	DHP (cm)	586	13,3	1,5	32,8
	Volume total avec écorce (dm ³)	586	98,8	0,6	689,9
	Volume total sans écorce (dm ³)	586	87,8	0,3	624,6
	Volume marchand sans écorce (dm ³)	453	98,6	8,8	621,1
EPN	Hauteur totale (m)	625	7,5	1,6	16,3
	DHP (cm)	625	11,5	0,8	24,6
	Volume total avec écorce (dm ³)	625	53,8	0,1	321,7
	Volume total sans écorce (dm ³)	625	46,1	0,1	289,2

Pour modéliser le volume total de la tige avec ou sans écorce de l'EPN, nous avons comparé l'ajustement de 8 équations (tableau 5). Puisque le volume avec écorce est lié à celui sans écorce, nous avons étalonné ces deux modèles simultanément avec la procédure MODEL de SAS (SAS Institute Inc. 2013b) et la méthode d'estimation FIML (équation 4). Pour tenir compte de l'hétérogénéité de la variance, nous avons modélisé la variance des modèles en fonction du DHP, avant de choisir l'équation définitive en fonction de la valeur de AIC sur les données de calibration et de l'ajustement du modèle sur les données de calibration.

$$V_{AE,ij} = f(DHP_{ij}, H_{ij}; \beta_{AE}) + \varepsilon_{AE,ij} \quad (\text{équation 4})$$

$$V_{SE,ij} = f(DHP_{ij}, H_{ij}; \beta_{SE}) + \varepsilon_{SE,ij}$$

où $(\varepsilon_{AE,ij}, \varepsilon_{SE,ij}) \sim N_2(0, \Sigma_{ij})$

$$\Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{AE,ij}^2 & \varphi \\ \varphi & \sigma_{SE,ij}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{AE,ij}^2 = \sigma_{AE}^2 DHP_{ij}^{\gamma_{AE}}$$

$$\sigma_{SE,ij}^2 = \sigma_{SE}^2 DHP_{ij}^{\gamma_{SE}}$$

où $V_{AE,ij}$ est le volume avec écorce (dm³) de l'arbre j de la placette i ; $V_{SE,ij}$; DHP_{ij} et H_{ij} sont respectivement le volume sans écorce (dm³), le diamètre à hauteur de poitrine (cm) et la hauteur totale (m) de ce même arbre; β_{AE} , β_{SE} , σ_{AE}^2 , σ_{SE}^2 , φ , γ_{AE} et γ_{SE} sont des paramètres à estimer; et $\varepsilon_{AE,ij}$ et $\varepsilon_{SE,ij}$ sont les erreurs résiduelles des modèles.

Tableau 5. Modèles testés pour modéliser le volume total d'une tige (V) en fonction de son diamètre à hauteur de poitrine (DHP) et de sa hauteur totale (H). $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ et β_3 sont les paramètres à estimer.

Catégorie	Équation
Modèles linéaires	$V = \beta_0 + \beta_1(DHP^2 \times H)$
	$V = \beta_0 + \beta_1(DHP \times H) + \beta_2(DHP^2 \times H)$
	$V = \beta_0 + \beta_1(DHP \times H) + \beta_2H$
	$V = \beta_0 + \beta_1DHP + \beta_2DHP^2 + \beta_3H$
Modèles non linéaires	$V = \beta_0 + \beta_1(DHP^{\beta_2} \times H^{\beta_3})$
	$V = \beta_1(DHP^{\beta_2} \times H^{\beta_3})$
	$V = \beta_1(DHP \times H)^{\beta_2}$
	$V = \beta_0 + \beta_1(DHP^{\beta_2} \times H)$

2.2.3 Équations de défilement

Une équation de défilement peut servir à estimer le volume de billes à différents diamètres au fin bout ou à différentes longueurs d'utilisation, puisqu'elle relie le diamètre à la hauteur et permet donc de caractériser la forme des tiges. L'équation de défilement estime généralement le diamètre (d) sur ou sous écorce à n'importe quel point sur la tige en fonction de la hauteur du point, du DHP et la hauteur totale de l'arbre. L'intégration mathématique des sections entre deux points le long de la tige permet d'estimer le volume d'une bille de l'arbre.

Pour le PIG, nous avons utilisé les mêmes arbres que pour les tarifs de cubage (tableau 4). Parmi les 586 études de défilement de PIG, 454 avaient atteint une dimension marchande, soit un DHP de plus de 9 cm. Pour l'EPN, 305 études de défilement sur les 625 avaient les informations complètes pour la modélisation (tableau 6 ; 76 placettes provenant de 64 plantations), et 165 d'entre elles avaient atteint une dimension marchande.

Tableau 6. Statistiques descriptives des arbres utilisés pour l'équation de défilement de l'épinette noire (EPN) en plantation (n = nombre d'arbres).

Essence	Variable	n	Moyenne	Minimum	Maximum
EPN	Hauteur totale (m)	305	7,3	2,0	16,3
	DHP (cm)	305	10,7	0,8	24,6
	Volume total sans écorce (dm ³)	305	52,3	0,2	289,2
	Volume marchand sans écorce (dm ³)	165	79,0	9,6	280,7

Dans cette étude, nous avons comparé les performances de 13 modèles à exposant variable ou à forme variable, soit les deux types d'équation de défilement qui performent généralement le mieux (Li et Weiskittel 2010, Rojo *et al.* 2005 ; annexe 1). Comme ces modèles ne modélisaient pas tous la même

réponse (diamètre, diamètre au carré, diamètre relatif ou aire de la surface de la section), nous avons modifié certaines des équations pour obtenir le diamètre au carré comme variable réponse, puisque Gregoire *et al.* (2000) ont montré que cette variable produit des prévisions non biaisées de l'aire de la surface de la section. Nous avons aussi ajouté un paramètre α_0 aux équations de l'annexe 1, si nécessaire, pour tenir compte de l'épaisseur d'écorce.

Les modèles ont été étalonnés à l'aide d'un modèle de régression non linéaire avec effets mixtes, en raison de la structure hiérarchique des données. Vu la complexité du modèle, il n'a cependant pas été possible de faire converger les modèles en incluant tous les effets aléatoires. En nous basant sur les résultats de Prégent *et al.* (2016), nous avons inclus seulement un effet aléatoire d'arbre. Le modèle de défilement général est le suivant (équation 5) :

$$d_{ijkl}^2 = (\alpha_0 + b_{ijk,1})f((\beta_0 + b_{ijk,2}), \mathbf{x}_{ijkl}, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon_{ijkl} \quad (\text{équation 5})$$

où d_{ijkl}^2 est le diamètre sous écorce au carré (cm^2), à une hauteur h_{ijkl} (m), pour la section l de l'arbre k de la placette j de la plantation i ; α_0 est un paramètre à estimer pour tenir compte de l'épaisseur d'écorce ; β_0 est un paramètre à estimer représentant l'ordonnée à l'origine du modèle ; $b_{ijk,1}, b_{ijk,2}$ sont des effets aléatoires d'arbre (sur l'épaisseur de l'écorce et l'ordonnée à l'origine respectivement), avec $b_{ijk,1} \sim N(0, \sigma_{arbre,1}^2)$ et $b_{ijk,2} \sim N(0, \sigma_{arbre,2}^2)$; \mathbf{x}_{ijkl} est un vecteur de variables explicatives (sans ordonnée à l'origine) ; $\boldsymbol{\beta}$ est un vecteur de paramètres à estimer (n'incluant pas l'ordonnée à l'origine) ; ε_{ijkl} est l'erreur résiduelle avec $\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} = (\varepsilon_{ijk1}, \dots, \varepsilon_{ijk o_{ijk}}) \sim N_{o_{ijk}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_{ijk}^{1/2} \boldsymbol{\Lambda}_{ijk} \boldsymbol{\Psi}_{ijk}^{1/2})$, où $\boldsymbol{\Psi}_{ijk}$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les variances intra-arbre ; $\boldsymbol{\Lambda}_{ijk}$ est une matrice de corrélation et o_{ijk} est le nombre de sections de l'arbre. La fonction `nlme` de la librairie `nlme` (Pinheiro *et al.* 2018) du logiciel R (R Core Team 2020) a été utilisée pour étalonner les modèles.

En raison de la complexité des modèles, la première étape a consisté à ajuster les 13 équations en supposant que tous les effets aléatoires et la corrélation intra-arbre étaient nuls et que les variances intra-arbre étaient homogènes. Le critère AIC a été utilisé pour déterminer l'équation qui s'ajustait le mieux aux données. En deuxième lieu, nous avons testé plusieurs fonctions de variance avec l'équation de défilement retenue pour estimer la matrice de variances intra-arbre $\boldsymbol{\Psi}_{ijk}$ (annexe 2). Le critère AIC a été utilisé pour déterminer la fonction qui s'ajustait le mieux. La troisième étape a consisté à modéliser les éléments de la matrice $\boldsymbol{\Lambda}_{ijk}$ à l'aide d'une structure autorégressive continue de premier ordre (CAR1) sur l'équation de défilement retenue, en incluant la fonction de variance (équation 6) :

$$\text{Corr}(\varepsilon_{ijkl}, \varepsilon_{ijkl'}) = \rho_{res}^{|h_{ijkl} - h_{ijkl'}|} \quad (\text{équation 6})$$

où ρ_{res} est le paramètre de corrélation.

En dernier lieu, nous avons ajouté les effets aléatoires $b_{ijk,1}$ et $b_{ijk,2}$ au modèle de défilement retenu (en incluant la fonction de variance choisie et la fonction de corrélation). Les modèles ont été simplifiés au besoin (effets aléatoires et fonction de corrélation).

2.2.4 Évaluation des modèles

Nous avons vérifié l'ajustement des modèles en examinant le biais (équation 7), la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (REQM, équation 8), le coefficient de détermination (R^2 , équation 9), la relation entre les données observées et estimées et le graphique des résidus. Nous avons aussi vérifié leur comportement en extrapolation.

$$biais = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) \quad (\text{équation 7})$$

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (\text{équation 8})$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (\text{équation 9})$$

où y_i est la valeur de l'observation i , \hat{y}_i est la valeur estimée de l'observation i , \bar{y} est la moyenne des observations, et n est le nombre d'observations. Pour les relations H-DHP, l'évaluation a été effectuée sur les données de calibration et sur les données de validation. Pour les tarifs de cubage et les équations de défilement, l'évaluation a été effectuée en validation croisée en enlevant un arbre à la fois.

Nous avons aussi utilisé les équations de défilement pour estimer le volume marchand des arbres par intégration numérique, en mettant l'effet aléatoire à 0 (prévisions marginales). Nous avons ensuite comparé cette valeur estimée au volume marchand observé. Nous avons aussi comparé le volume marchand estimé par les équations de défilement de cette étude aux valeurs obtenues en utilisant les équations 5 et 9 de Prégent *et al.* (2001) pour le PIG, et en utilisant l'équation 1.6.1.4 de Prégent *et al.* (1996) pour l'EPN.

3. Résultats

3.1. Hauteur totale en fonction du DHP

Le modèle de Korf (équation 10) est celui qui s'ajustait le mieux, à la fois selon la performance des modèles en calibration et en validation et selon leur comportement en extrapolation (tableau 7), et ce, autant pour le PIG que pour l'EPN :

$$H = 1,3 + \alpha_1 (e^{-\alpha_2 DHP - \alpha_3}) \quad (\text{équation 10})$$

Tableau 7. Valeur des paramètres (avec erreur type entre parenthèses) et évaluation (avec valeur relative entre parenthèses) de l'équation 10 (voir aussi l'équation 1) pour estimer la hauteur totale d'un arbre en fonction du diamètre à hauteur de poitrine (DHP) pour le pin gris (PIG) et l'épinette noire (EPN) en plantation.

Paramètre	PIG	EPN
α_1	1 630 094 (3 805 823)	101 489 (92 640)
α_2	15,3007 (2,2882)	12,1844 (0,9005)
α_3	0,0900 (0,0167)	0,0974 (0,0087)
σ^2	0,8700	0,6726
p_1	0,2820 (0,1078)	0,1822 (0,0583)
p_2	-0,0265 (0,0156)	-0,0207 (0,0084)
p_3	0,0015 (0,0005)	0,0011 (0,0003)
Biais calibration (m)	0,03 (0,5 %)	0,01 (0,1 %)
Biais validation (m)	0,02 (0,4 %)	0,04 (0,8 %)
REQM calibration (m)	1,47 (19,9 %)	0,86 (15,9 %)
REQM validation (m)	1,19 (18,7 %)	0,79 (14,3 %)
R^2 calibration	0,91	0,95
R^2 validation	0,87	0,93

Les résidus des modèles et les valeurs estimées ne présentent pas de biais pour les deux essences (tableau 7, figures 2 et 3). La figure 4 présente la relation H-DHP obtenue pour les deux essences.

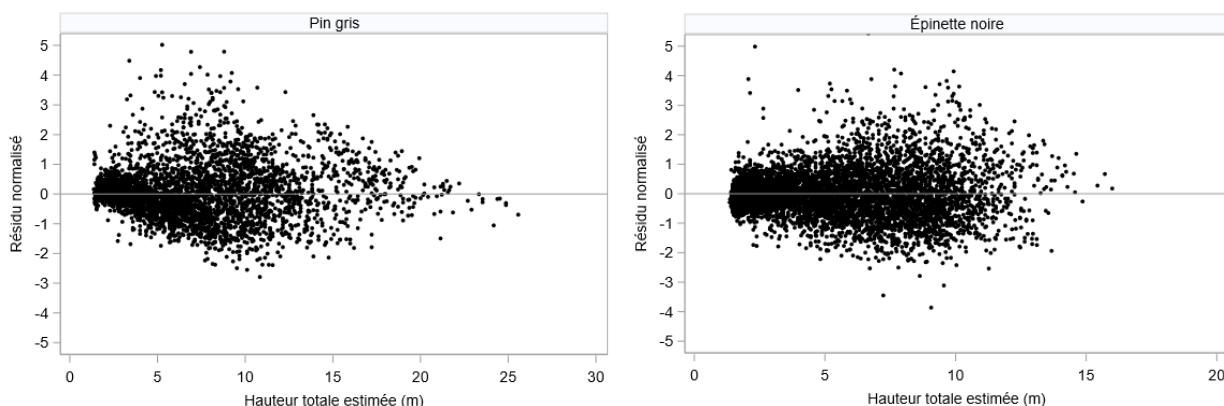


Figure 2. Graphiques des résidus normalisés en fonction des hauteurs totales estimées avec l'équation 10, pour le pin gris (à gauche) et l'épinette noire (à droite), à l'aide des données de calibration.

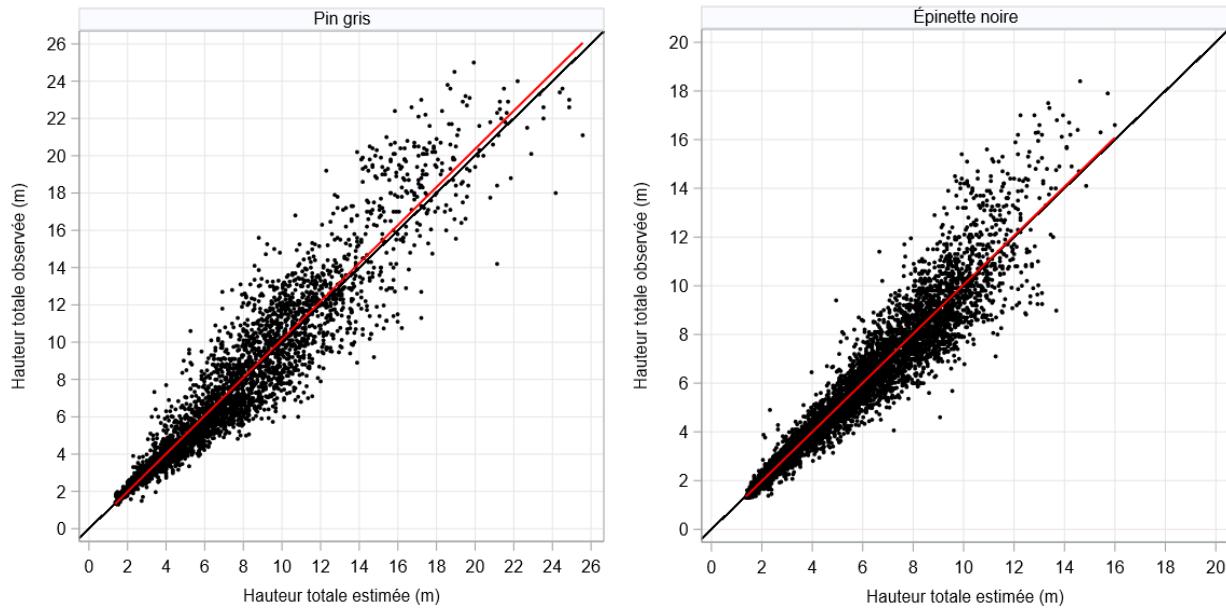


Figure 3. Graphique de la hauteur totale observée en fonction de celle estimée avec l'équation 10, pour le pin gris (à gauche) et l'épinette noire (à droite), à l'aide des données de calibration. La ligne noire représente la droite 1:1 et la ligne rouge, celle de la droite de la régression.

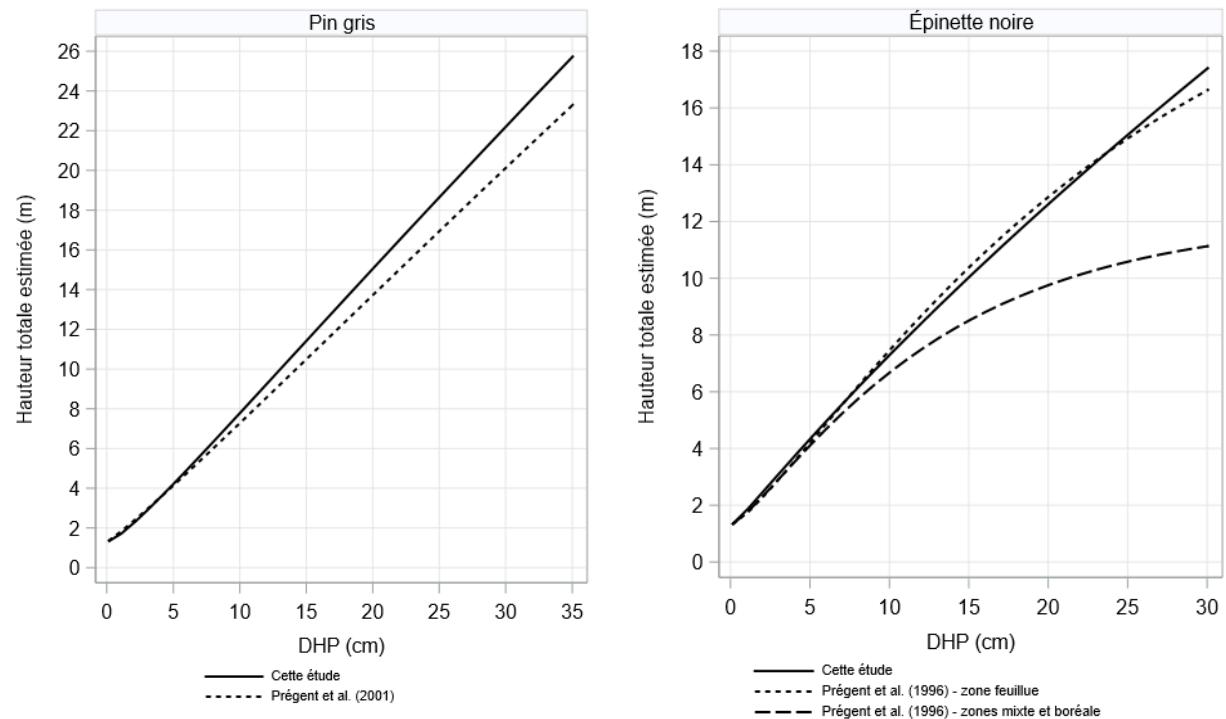


Figure 4. Graphiques de la hauteur totale estimée avec l'équation 10 (ligne pleine) pour le pin gris (à gauche) et l'épinette noire (à droite) en plantation, en fonction de leur diamètre à hauteur de poitrine (DHP). Les lignes pointillées représentent la hauteur estimée avec le modèle de Prégent et al. (2001) pour le pin gris et avec celui de Prégent et al. (1996) pour l'épinette noire.

3.2. Hauteur totale en fonction du DHP et du DHP moyen dans une placette

Pour estimer la hauteur totale en fonction du DHP ainsi que du DHP moyen de tous les arbres de la placette, nous avons choisi le modèle qui s'ajustait le mieux pour chacune des essences, soit celui de Chapman-Richards (équations 2 et 11) pour le PIG et celui de Hossfeld II (équations 2 et 12) pour l'EPN (tableau 8) :

$$\text{PIG : } H = 1,3 + (\alpha_{10} + \alpha_{11} DMOY) (1 - e^{-(\alpha_{20} + \alpha_{21} DMOY) \cdot DHP})^{\alpha_3} \quad (\text{équation 11})$$

$$\text{EPN : } H = 1,3 + \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{11} DMOY) \times DHP^{\alpha_3}}{(\alpha_{20} + \alpha_{21} DMOY) + DHP^{\alpha_3}} \quad (\text{équation 12})$$

Tableau 8. Valeur des paramètres (avec erreur type entre parenthèses) et évaluation (avec valeur relative entre parenthèses) des équations 11 et 12 utilisées pour estimer la hauteur totale en fonction du diamètre à hauteur de poitrine (DHP) et du DHP moyen des arbres d'une placette, pour le pin gris (PIG) et l'épinette noire (EPN) en plantation.

Paramètre	PIG	EPN
α_{10}	6,5613 (0,5572)	4,4337 (0,2201)
α_{11}	0,6849 (0,0289)	0,9183 (0,0246)
α_{20}	0,0587 (0,0057)	7,6017 (0,4795)
α_{21}	0,0015 (0,0003)	2,1394 (0,1044)
α_3	0,9461 (0,0177)	1,4324 (0,0218)
σ^2	0,0291	0,0226
γ	1,63	1,56
Biais calibration (m)	-0,007 (-0,1 %)	0,004 (0,1 %)
Biais validation (m)	-0,034 (-0,5 %)	-0,03 (-0,5 %)
REQM calibration (m)	1,08 (15,6 %)	0,74 (14,4 %)
REQM validation (m)	0,99 (15,7 %)	0,75 (13,6 %)
R ² calibration	0,94	0,94
R ² validation	0,91	0,93

Les résidus des modèles et les valeurs estimées ne présentent pas de biais (tableau 8, figures 5 et 6). La figure 7 présente la relation H-DHP obtenue pour différentes valeurs de DHP moyen dans une placette.

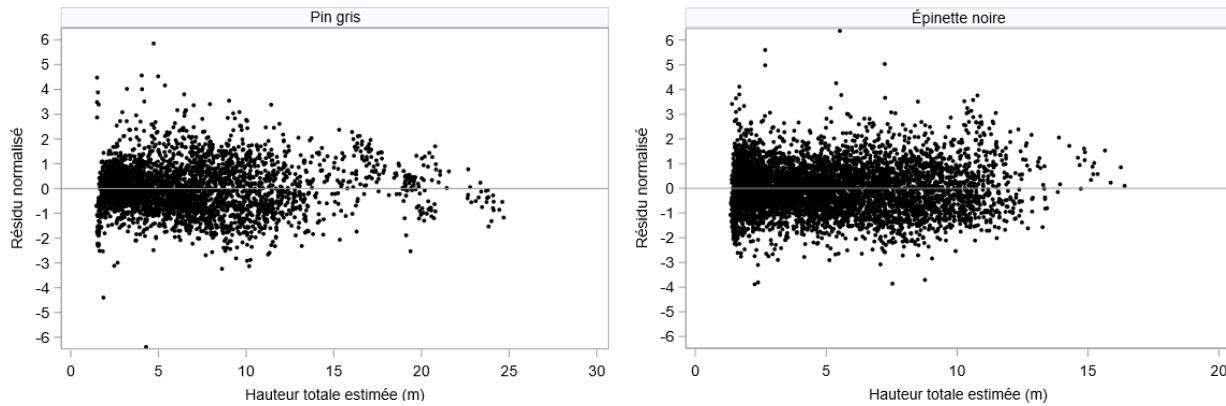


Figure 5. Graphiques des résidus normalisés en fonction des hauteurs totales estimées avec l'équation 11 pour le pin gris (à gauche) et l'équation 12 pour l'épinette noire (à droite), à l'aide des données de calibration.

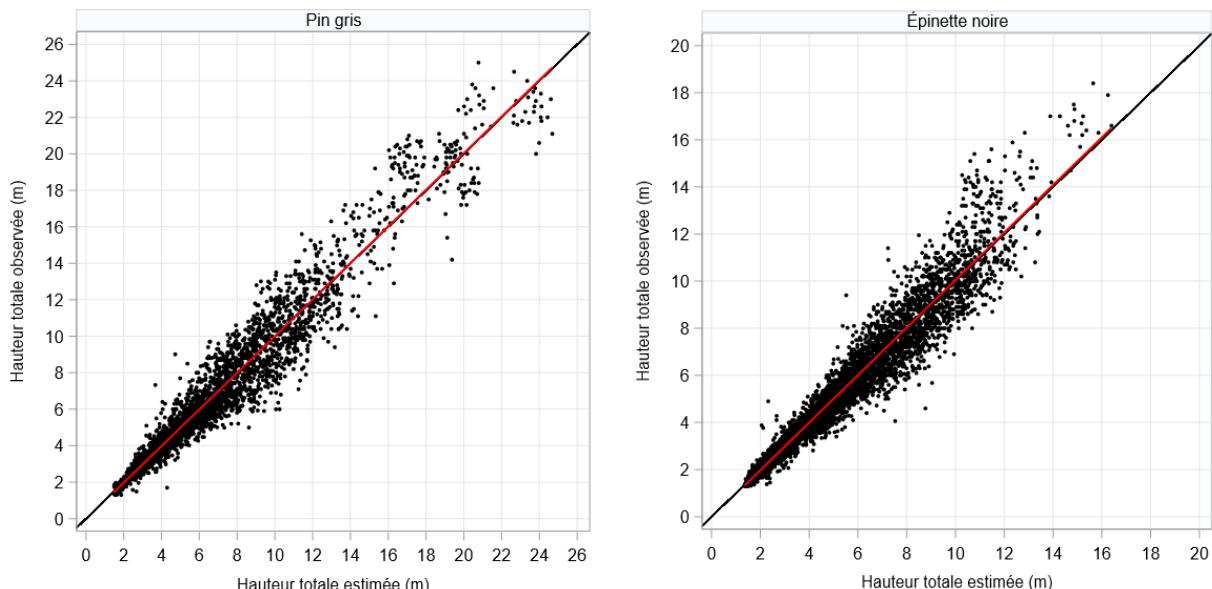


Figure 6. Graphiques de la hauteur totale observée en fonction de celle estimée avec l'équation 11 pour le pin gris (à gauche) et l'équation 12 pour l'épinette noire (à droite), à l'aide des données de calibration. La ligne noire représente la droite 1:1 et la ligne rouge, celle de la droite de régression.

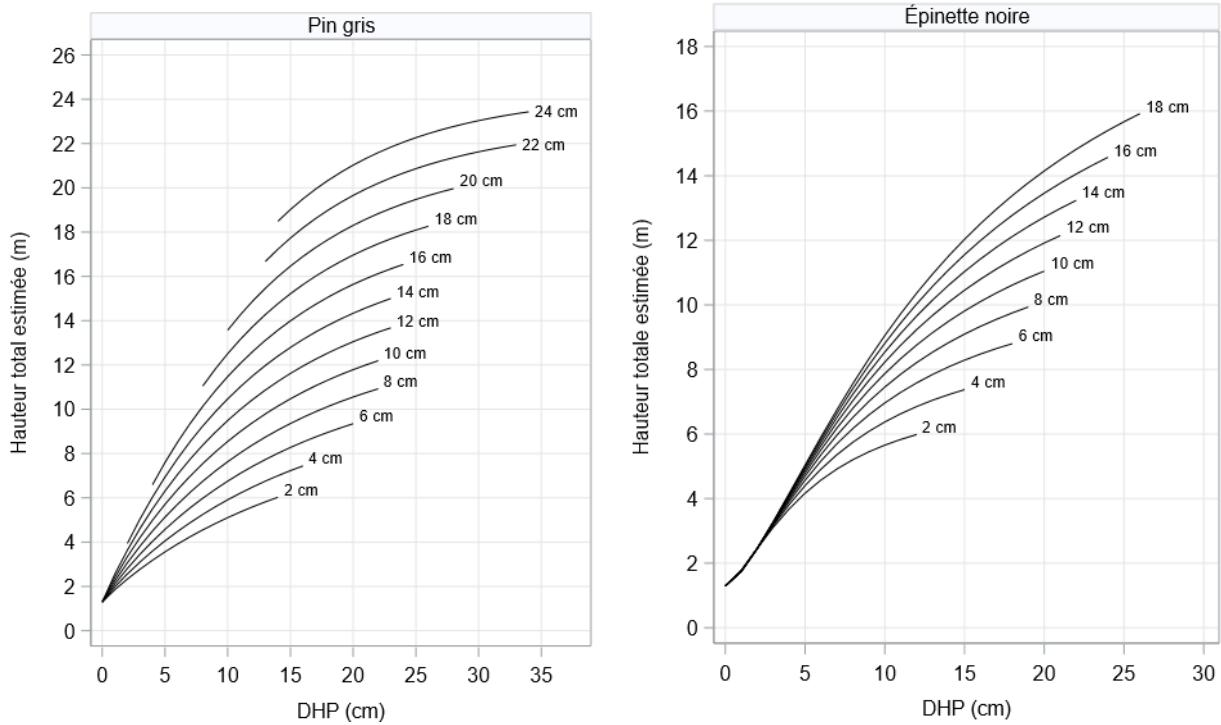


Figure 7. Graphiques de la hauteur totale estimée pour le pin gris (à gauche) et l'épinette noire (à droite) en plantation en fonction de leur diamètre à hauteur de poitrine (DHP) et du DHP moyen des arbres de leur placette (chiffre à droite de chaque ligne noire).

3.3. Hauteur totale en fonction du DHP et des caractéristiques des arbres dominants

Pour estimer la hauteur totale en fonction du DHP ainsi que du DHP moyen et de la hauteur moyenne des arbres dominants, nous avons retenu les mêmes fonctions que celles de la section précédente (équations 13 et 14, tableau 9) :

$$\text{PIG : } H = 1,3 + (\alpha_{10} + \alpha_{11} HDOM) (1 - e^{-(\alpha_{20} + \alpha_{22} DDOM) \times DHP})^{\alpha_3} \quad (\text{équation 13})$$

$$\text{EPN : } H = 1,3 + \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{11} HDOM) \times DHP^{\alpha_3}}{(\alpha_{20} + \alpha_{22} DDOM) + DHP^{\alpha_3}} \quad (\text{équation 14})$$

Tableau 9. Valeur des paramètres (avec erreur type entre parenthèses) et évaluation (avec valeur relative entre parenthèses) des équations 13 et 14 utilisées pour estimer la hauteur totale en fonction du diamètre à hauteur de poitrine (DHP), du DHP moyen et de la hauteur moyenne des arbres dominants, pour le pin gris (PIG) et l'épinette noire (EPN) en plantation.

Paramètre	PIG	EPN
α_{10}	-0,2009 (0,0812)	-0,3031 (0,0593)
α_{11}	0,9632 (0,0085)	1,1438 (0,0162)
α_{20}	0,1944 (0,0077)	0,5571 (0,2196)
α_{22}	-0,0031 (0,0003)	1,6414 (0,0766)
α_3	0,8950 (0,0325)	1,5999 (0,0301)
σ^2	0,3329	0,1935
Biais calibration (m)	0,004 (0,1 %)	-0,003 (-0,1 %)
Biais validation (m)	0,03 (0,5 %)	-0,002 (-0,0 %)
REQM calibration (m)	0,58 (7,8 %)	0,44 (8,1 %)
REQM validation (m)	0,53 (8,5 %)	0,45 (8,2 %)
R^2 calibration	0,98	0,98
R^2 validation	0,97	0,98

Selon l'évaluation graphique des résidus des modèles et la comparaison des valeurs estimées aux valeurs observées, les modèles ne sont pas biaisés pour les deux essences (tableau 9, figures 8 et 9). La figure 10 présente la relation H-DHP obtenue pour différentes combinaisons de hauteur dominante et de DHP moyen des arbres dominants d'une placette.

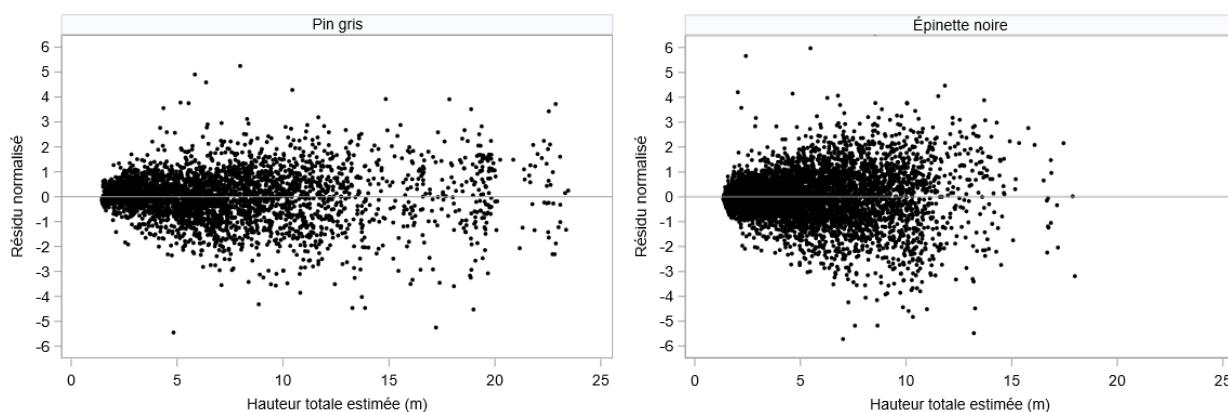


Figure 8. Graphiques des résidus normalisés en fonction des hauteurs totales estimées avec l'équation 13 pour le pin gris (à gauche) et l'équation 14 pour l'épinette noire (à droite), à l'aide des données de calibration.

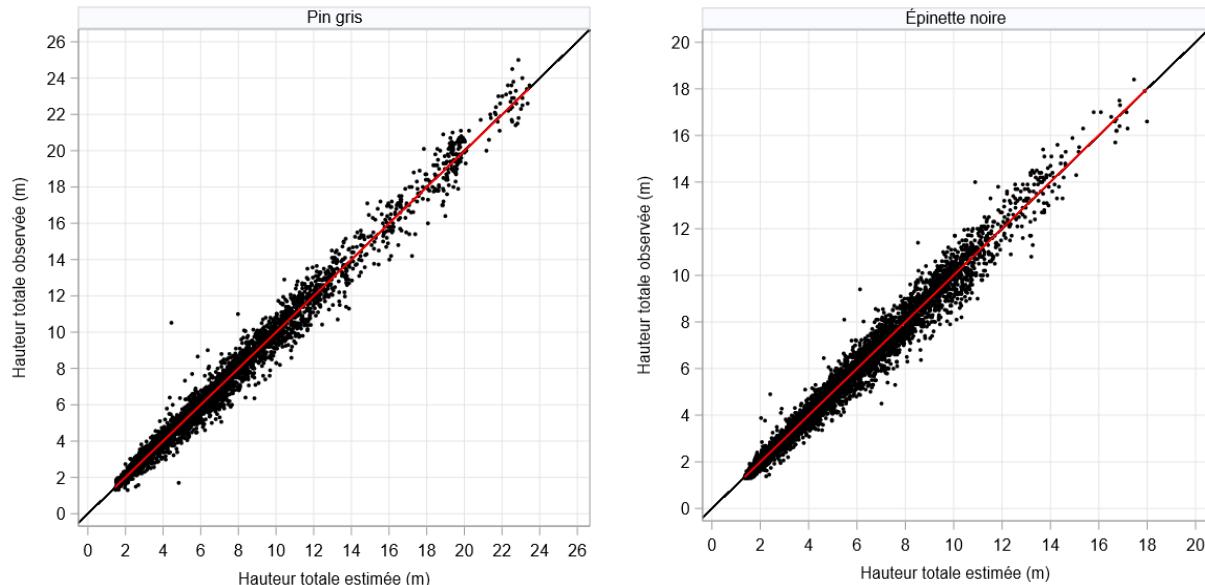


Figure 9. Graphiques de la hauteur totale observée en fonction de celle estimée avec l'équation 13 pour le pin gris (à gauche) et l'épinette noire (à droite), à l'aide des données de calibration. La ligne noire représente la droite 1:1 et la ligne rouge, celle de la droite de régression.

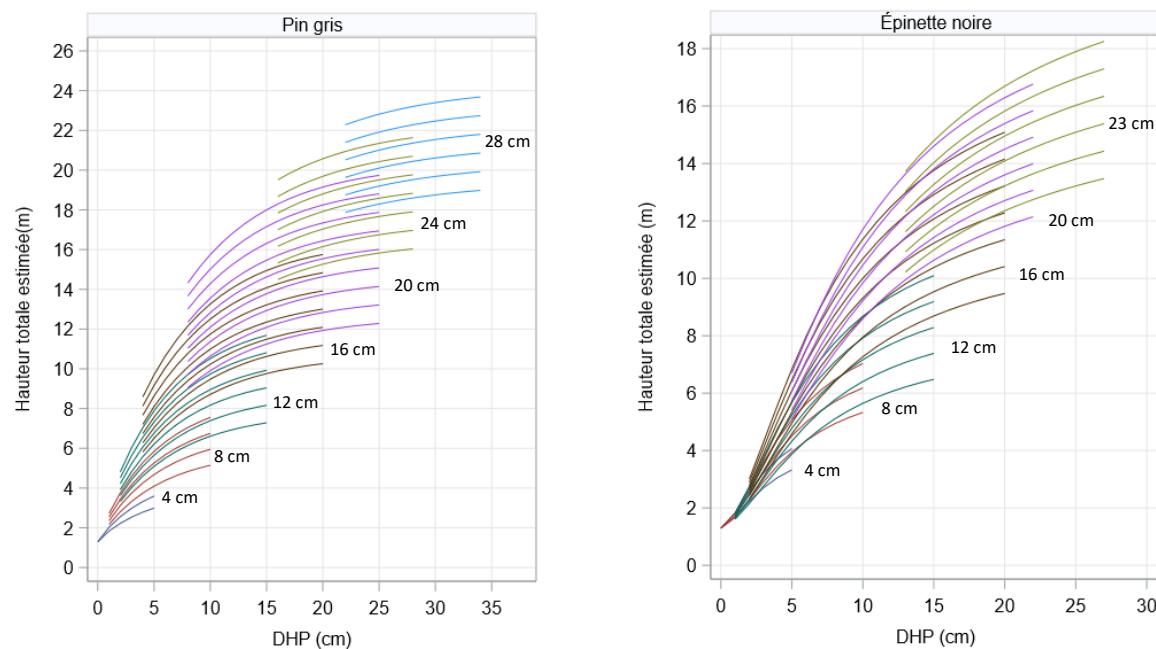


Figure 10. Graphiques de la hauteur totale estimée pour le pin gris (à gauche) et l'épinette noire (à droite) en plantation en fonction de son diamètre à hauteur de poitrine (DHP), du DHP moyen des arbres dominants de sa placette (valeur indiquée à droite de chaque groupe de lignes d'une couleur donnée) et de la hauteur moyenne des arbres dominants de sa placette. De bas en haut, pour chaque DHP moyen, les lignes d'une même couleur correspondent à des valeurs croissantes de hauteur moyenne allant de 3 à 24 m pour le pin gris et de 3 à 18 m pour l'épinette noire.

Pour le PIG, la figure 11 compare le modèle de cette étude à celui de Prégent *et al.* (2001).

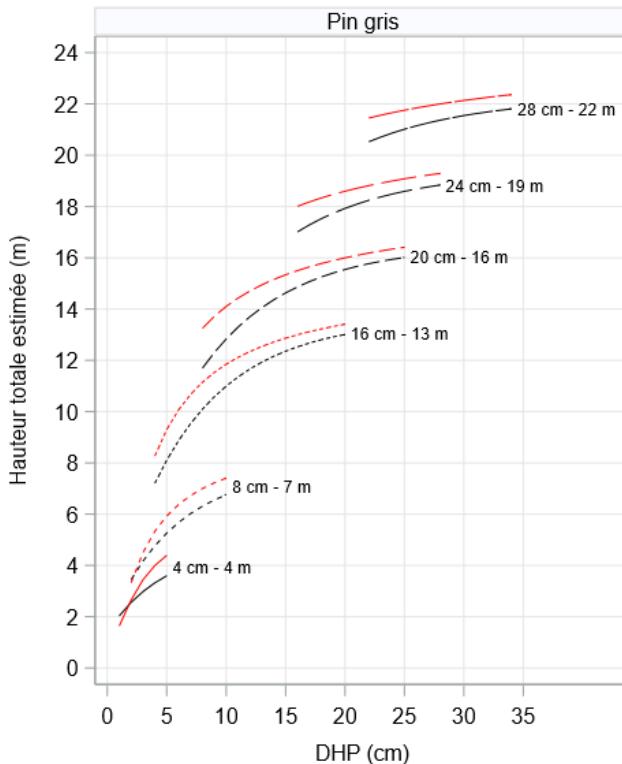


Figure 11. Graphique de la hauteur totale estimée pour le pin gris en plantation en fonction de son DHP, d'après l'équation 13 (lignes noires) et le modèle de Prégent *et al.* (2001) (lignes rouges), pour différentes combinaisons de DHP moyen et de hauteur moyenne des arbres dominants (lignes de patrons différents).

3.4. Tarifs de cubage

Pour l'EPN, les modèles qui s'ajustaient le mieux pour estimer les volumes avec et sans écorce (tableau 10, équation 4) sont les suivants (équations 15 et 16) :

$$V_{AE} = \beta_{AE,0} + \beta_{AE,1} (DHP^{\beta_{AE,2}} \times H^{\beta_{AE,3}}) \quad (\text{équation 15})$$

$$V_{SE} = \beta_{SE,0} + \beta_{SE,1} (DHP^{\beta_{SE,2}} \times H^{\beta_{SE,3}}) \quad (\text{équation 16})$$

Les résidus des modèles et les valeurs estimées ne présentent pas de biais (tableau 10, figures 12 et 13).

Tableau 10. Valeur des paramètres (avec erreur type entre parenthèses) et évaluation (avec valeur relative entre parenthèses) des équations 15 et 16 (et de l'équation 4) utilisées pour estimer les volumes avec et sans écorce à partir du diamètre à hauteur de poitrine (DHP) et de la hauteur totale pour l'épinette noire en plantation.

Paramètre	Volume avec écorce		Volume sans écorce	
β_0	0,4549	(0,0300)	0,3701	(0,0301)
β_1	0,0465	(0,0014)	0,0371	(0,0013)
β_2	1,8509	(0,0185)	1,8569	(0,0216)
β_3	1,0914	(0,0180)	1,1161	(0,0210)
σ	0,1014	(0,0088)	0,1020	(0,0088)
γ	2,7950	(0,0710)	2,7917	(0,0707)
φ (covariance)			0,8967	
Biais validation (dm ³)	0,0 (0,0 %)		0,0 (0,0 %)	
REQM validation (dm ³)	5,0 (9,3 %)		5,0 (10,8 %)	
R ² validation	0,99		0,99	

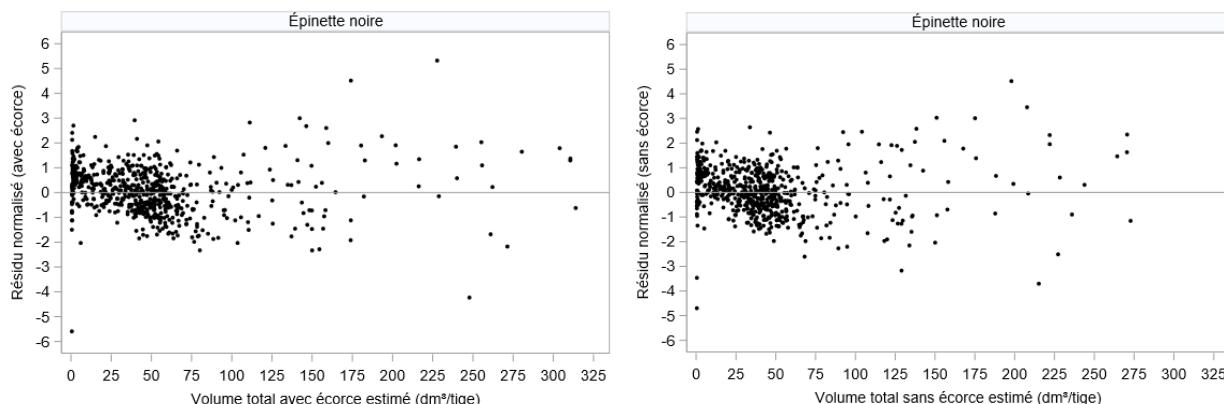


Figure 12. Graphiques des résidus normalisés en fonction des volumes totaux de l'épinette noire estimés avec l'équation 15 pour ceux avec écorce (à gauche) et l'équation 16 pour ceux sans écorce (à droite).

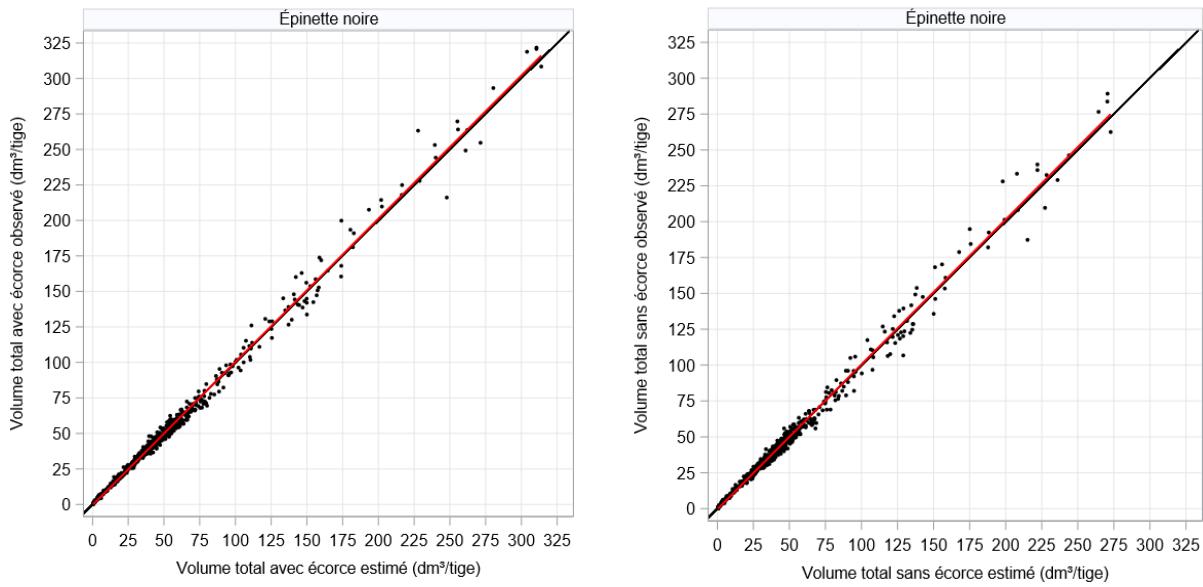


Figure 13. Graphiques du volume total observé de l'épinette noire en fonction de celui estimé avec l'équation 15 pour celui avec écorce (à gauche) et l'équation 16 pour celui sans écorce (à droite). La ligne noire représente la droite 1:1 et la ligne rouge, celle de la droite de régression.

La figure 14 présente le volume total avec et sans écorce observé des tiges de PIG de cette étude en fonction du volume estimé avec les modèles de Prégent *et al.* (2001).

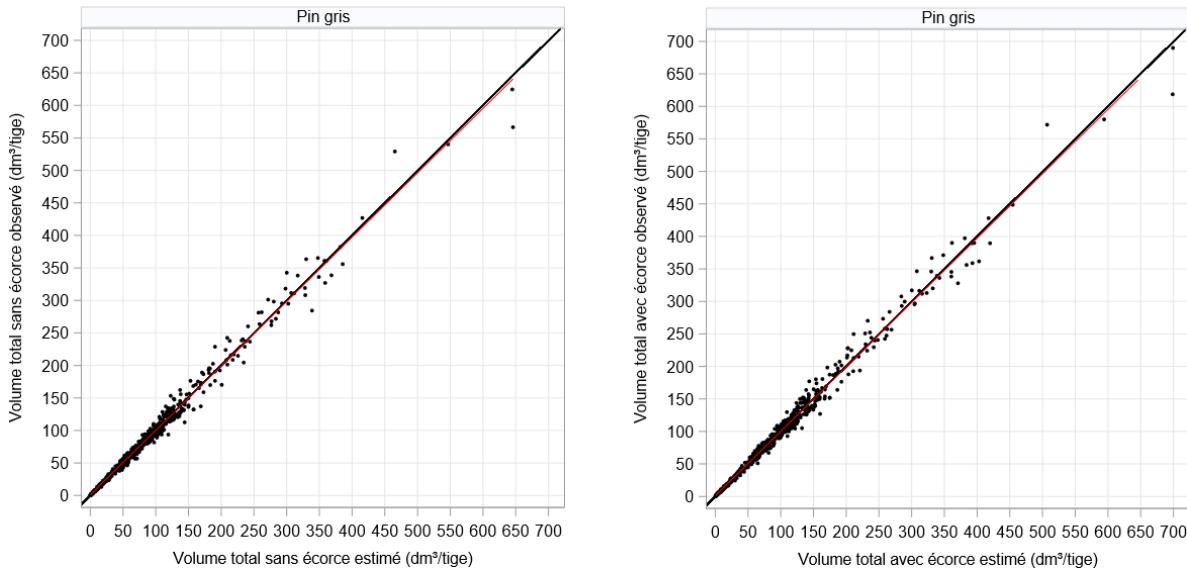


Figure 14. Graphiques du volume total avec écorce (à gauche) et du volume total sans écorce (à droite) observés des tiges de pin gris de notre étude en fonction de ceux estimés avec les modèles de Prégent *et al.* (2001). Les modèles sont : $V_{AE} = 0,153518 + 0,066125(DHP \times H) + 0,034064(DHP^2 \times H)$ et $V_{SE} = 0,128992 + 0,017232(DHP \times H) + 0,032820(DHP^2 \times H)$. La ligne noire représente la droite 1:1 et la ligne rouge, celle de la droite de régression.

La figure 15 présente les tarifs de cubage sans écorce de l'EPN pour différentes hauteurs, ainsi qu'une comparaison avec le tarif de Prément et al. (1996).

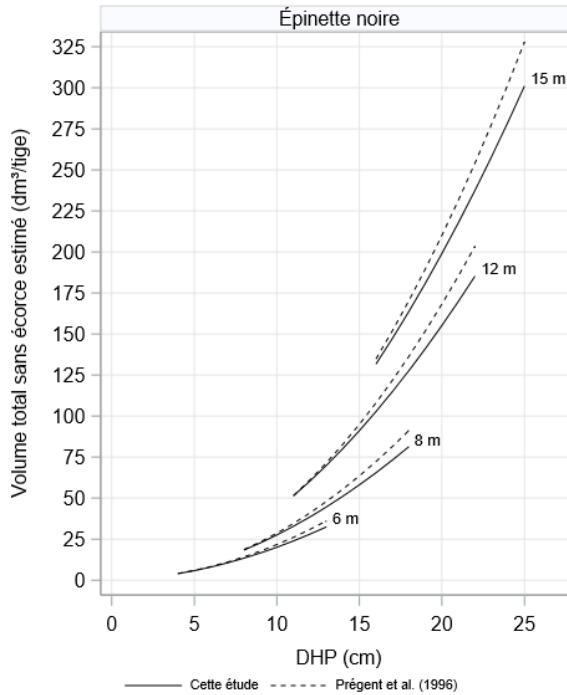


Figure 15. Graphique du volume total sans écorce estimé avec le modèle de cette étude (lignes pleines) et avec le tarif de cubage de Prément et al. (1996) (lignes pointillées) pour l'épinette noire en plantation, en fonction de son diamètre à hauteur de poitrine (DHP), pour différentes hauteurs (chiffres à droite des différentes paires de courbes).

3.5. Équations de défilement

Sur la base du critère AIC, les meilleurs modèles étaient celui de Bi (2000, annexe 1) pour l'EPN et le modèle 02 de Kozak (2004) pour le PIG. Toutefois, comme le modèle de Kozak sous-estimait le volume des arbres ayant un grand DHP, nous avons plutôt retenu le modèle qui venait au 2^e rang pour le PIG, soit celui de Bi (2000). Selon le critère AIC, la fonction de variance présentée dans Valentine et Gregoire (2001, annexe 2) était celle qui s'ajustait le mieux aux données pour les deux essences. Pour l'EPN, nous avons retenu un effet aléatoire d'arbre sur le paramètre β_0 , sans fonction de corrélation. Pour le PIG, nous avons retenu un effet aléatoire d'arbre sur le paramètre α_0 , ainsi qu'une fonction de corrélation CAR1.

Le modèle définitif retenu pour le PIG est représenté par l'équation 17, dont les paramètres sont présentés au tableau 11.

$$d^2 = (\alpha_0 + b_{arbre,1})DHP^2 \times B^{\beta_0 + \beta_2 \sin(z\pi/2) + \beta_3 \cos(z3\pi/2) + \beta_4 \sin(z\pi/2)/z + \beta_5 DHP + \beta_6 z\sqrt{DHP} + \beta_7 z\sqrt{H}} \quad (\text{équation 17})$$

où d^2 est le diamètre au carré sous écorce à une hauteur h d'une tige avec une hauteur totale H ; $B = \ln\left(\sin\left(\frac{z\pi}{2}\right)\right)/\ln\left(\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right)$; $p = niv/H$; $z = h/H$; niv est la hauteur de mesure du DHP ; $b_{arbre,1}$ est l'effet aléatoire d'arbre, $b_{arbre,1} \sim N(0, \sigma_{arbre,1}^2)$; et $d^2 \sim N(\hat{d}^2, \sigma^2)$, où $\sigma^2 = \sigma_{res}^2 DHP^{2\delta_1} e^{2\delta_2(\frac{H-h}{H})}$.

Tableau 11. Valeur des paramètres (avec erreur type entre parenthèses) et évaluation (avec valeur relative entre parenthèses) des équations de défilement sous écorce pour le pin gris (PIG; équation 17) et l'épinette noire (EPN ; équation 18).

Paramètre	PIG	EPN
α_0	0,87104 (0,00436)	0,87239 (0,00338)
β_0	4,76457 (0,11249)	2,85390 (0,15447)
β_2	-0,16270 (0,05674)	-0,31316 (0,06682)
β_3	-0,16391 (0,01395)	-0,05073 (0,01529)
β_4	-2,69083 (0,06826)	-1,32960 (0,08786)
β_5	0,00548 (0,00070)	-0,01208 (0,00133)
β_6	0,15460 (0,01661)	0,11973 (0,02068)
β_7	-0,53110 (0,01738)	-0,18786 (0,02659)
$\sigma_{arbre,1}$	0,04427	–
$\sigma_{arbre,2}$	–	0,1148
σ_{res}	0,2427	0,1154
δ_1	1,0675	1,0349
δ_2	1,8787	2,8220
ρ_{res}	0,5703	–
Biais validation (cm ²)	1,1 (0,6 %)	1,4 (1,2 %)
REQM validation (cm ²)	20,5 (11,9 %)	22,1 (18,1 %)
R ² validation	0,98	0,97

Le modèle définitif retenu pour l'EPN est représenté par l'équation 18, dont les paramètres sont présentés au tableau 11.

$$d^2 = \alpha_0 DHP^2 \times B^{(\beta_1 + b_{arbre,2}) + \beta_1 \sin(z\pi/2) + \beta_3 \cos(z3\pi/2) + \beta_4 \sin(z\pi/2)/z + \beta_5 DHP + \beta_6 z\sqrt{DHP} + \beta_7 z\sqrt{H}} \quad (\text{équation 18})$$

où $b_{arbre,2}$ est l'effet aléatoire d'arbre et $b_{arbre,2} \sim N(0, \sigma_{arbre,2}^2)$.

L'examen des résidus normalisés issus des deux modèles ne montre aucune divergence par rapport aux postulats d'homogénéité de la variance (figure 16).

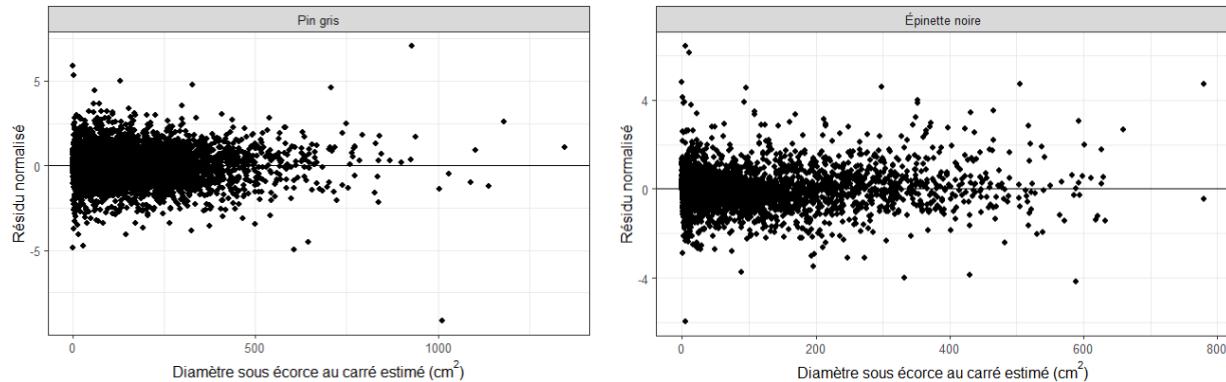


Figure 16. Graphiques des résidus normalisés en fonction des diamètres sous écorce au carré estimés avec l'équation 17 pour le pin gris (à gauche) et l'équation 18 pour l'épinette noire (à droite).

Les estimations du diamètre sous écorce au carré obtenues avec les équations de défilement du PIG et de l'EPN ne montrent pas de biais (tableau 11, figure 17).

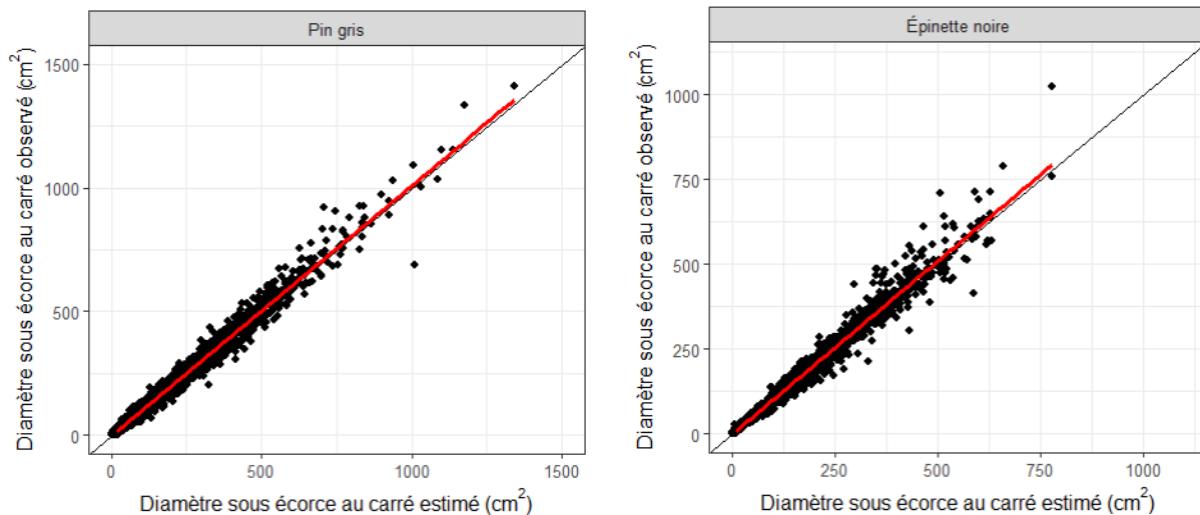


Figure 17. Graphiques du diamètre sous écorce au carré observé en fonction de celui estimé avec l'équation 17 pour le pin gris (à gauche) et l'équation 18 pour l'épinette noire (à droite). La ligne noire représente la droite 1:1 et la ligne rouge, celle de la régression.

Pour le PIG et l'EPN, les équations de défilement pour estimer le volume marchand ne montrent pas de manque d'ajustement (figure 18, tableau 12).

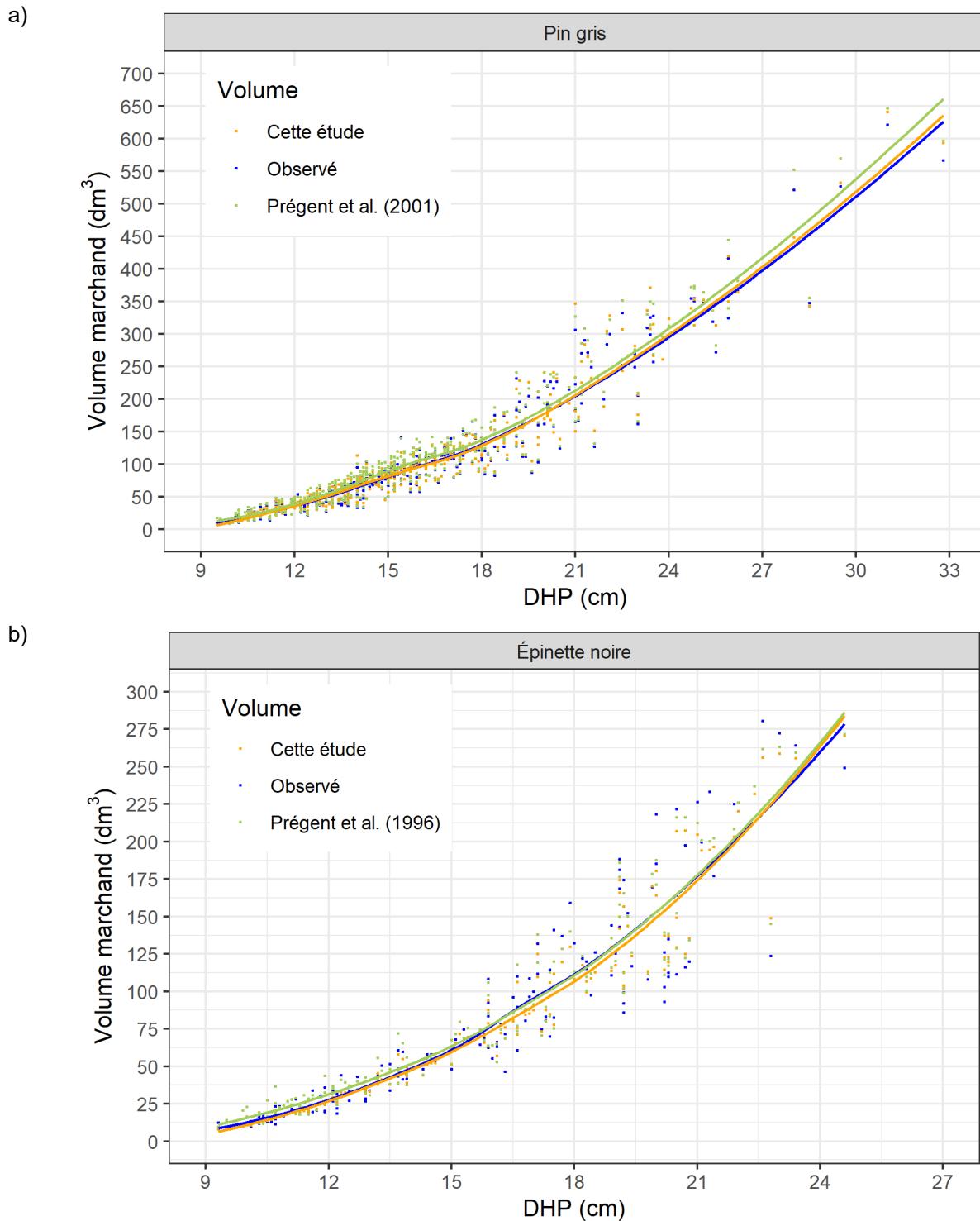


Figure 18. Graphiques comparant le volume marchand observé en fonction du diamètre à hauteur de poitrine (DHP) avec celui estimé par les modèles retenus dans cette étude de même que a) celui de Prégent et al. (2001) pour le pin gris et b) celui de Prégent et al. (1996) pour l'épinette noire.

Tableau 12. Évaluation des estimations du volume marchand pour le pin gris (PIG) et l'épinette noire (EPN).

Essence (n*)	Équation	Volume marchand observé (dm ³)	Biais		REQM	
			(dm ³)	(%)	(dm ³)	(%)
PIG (n = 454)	Cette étude (équation 17)	98,6	-0,4	-0,4 %	10,9	11,0 %
	Prégent <i>et al.</i> 2001	98,6	-6,9	-7,0 %	10,3	10,5 %
EPN (n = 165)	Cette étude (équation 18)	79,0	2,3	2,9 %	10,8	13,7 %
	Prégent <i>et al.</i> 1996	79,0	-1,8	-2,3 %	9,9	12,5 %

* n = nombre d'arbres marchands de cette étude, selon l'équation utilisée.

4. Discussion

Nous avons élaboré 3 types de relations H-DHP pour l'EPN et le PIG en plantation, qui peuvent être utilisées selon les informations disponibles dans l'inventaire des arbres. Pour le PIG, la relation H-DHP qui dépend seulement du DHP estime des hauteurs supérieures par rapport à celle de Prégent *et al.* (2001); pour les grands DHP en particulier, la différence atteint 2 m (figure 4). À l'inverse, la relation pour le PIG utilisant les caractéristiques des arbres dominants estime des hauteurs inférieures par rapport à celle de Prégent *et al.* (2001); cependant, les différences sont généralement inférieures à 1 m (figure 11). Pour l'EPN, la nouvelle relation H-DHP qui dépend seulement du DHP est semblable à celle pour la zone feuillue que l'on trouve dans Prégent *et al.* (1996) (figure 4).

Pour les deux essences, l'erreur sur les estimations de hauteur diminue selon le niveau d'information utilisé. Pour l'EPN, l'erreur est de 0,9 m si l'on utilise le DHP ; elle diminue à 0,7 m si l'on utilise le DHP moyen et à 0,4 m si l'on utilise les caractéristiques des arbres dominants (tableaux 7, 8 et 9). Pour le PIG, cette erreur passe de 1,5 m avec le DHP à 1,1 m avec le DHP moyen et à 0,6 m avec les caractéristiques des arbres dominants.

Dans cette étude, nous n'avions pas suffisamment de nouvelles observations pour justifier l'ajustement d'un nouveau tarif de cubage pour le PIG. D'ailleurs, le tarif de cubage de Prégent *et al.* (2001) pour le PIG s'ajuste correctement (figure 14). Pour l'EPN, le tarif de cubage de cette étude estime un volume total inférieur à celui obtenu avec Prégent *et al.* (1996), en particulier pour les grands DHP (figure 15).

Les équations de défilement permettent d'estimer le diamètre sur toute la longueur de la tige. Ce type d'équation peut ensuite servir à estimer le volume (en particulier le volume marchand) à différentes hauteurs ou à différents diamètres. Pour l'EPN, le modèle de Prégent *et al.* (1996), bien que non biaisé (figure 18b, tableau 12), ne permettait d'estimer que le volume marchand, alors que la nouvelle équation permet d'estimer le volume à n'importe quel diamètre au fin bout. Pour le PIG, l'équation de Prégent *et al.*

(2001), bien qu'elle permette d'estimer le volume à n'importe quel diamètre au fin bout, surestimaient légèrement le volume marchand (tableau 12, figure 18a).

5. Conclusion et recommandations

Le présent travail a permis de produire de nouvelles relations H-DHP, des tarifs de cubage et des équations de défilement pour l'EPN et le PIG en plantation. Pour l'EPN, des modèles plus précis sont maintenant disponibles, entre autres les modèles de hauteur utilisant le DHP moyen des arbres ou les caractéristiques des arbres dominants de la placette. L'équation de défilement de l'EPN permet maintenant d'estimer le volume à des hauteurs ou à des diamètres variables. Pour le PIG, la taille supérieure du jeu de données et l'étendue plus grande des valeurs de hauteur et de DHP ont permis de définir des relations H-DHP encore plus fiables. Le tarif de cubage pour le PIG de Prégent *et al.* (2001) est toujours celui que nous recommandons, mais nous présentons une nouvelle équation de défilement.

6. Références

- Bi, H., 2000. *Trigonometric variable-form taper equations for Australian Eucalyptus*. For. Sci. 46(3): 397-409. <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.3.397>
- de-Miguel, S., L. Mehtätalo, Z. Shater, B. Kraid et T. Pukkala, 2012. *Evaluating marginal and conditional predictions of taper models in the absence of calibration data*. Can. J. For. Res. 42(7): 1383-1394. <https://doi.org/10.1139/x2012-090>
- Gregoire, T.G., O. Schabenberger et F. Kong, 2000. *Prediction from an integrated regression equation: A forestry application*. Biometrics 56(2): 414-419. <https://doi.org/10.1111/j.0006-341X.2000.00414.x>
- Kozak, A., 1997. *Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions*. Can. J. For. Res. 27(5): 619-629. <https://doi.org/10.1139/x97-011>
- Kozak, A., 2004. My last words on taper equations. For. Chron. 80(4): 507-514. <https://doi.org/10.5558/tfc80507-4>

Lee, W.K., J.H. Seo, Y.M. Son, K.H. Lee et K. von Gadow, 2003. *Modeling stem profiles for Pinus densiflora in Korea*. For. Ecol. Manage. 172(1): 69-77. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(02\)00139-1](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(02)00139-1)

Lejeune, G., C.-H. Ung, M. Fortin, X.J. Guo, M.-C. Lambert et J.-C. Ruel, 2009. *A simple stem taper model with mixed effects for boreal black spruce*. Eur. J. For. Res. 128: 505-513. <https://doi.org/10.1007/s10342-009-0300-8>

Li, R., et A.R. Weiskittel, 2010. *Comparison of model forms for estimating stem taper and volume in the primary conifer species of the North American Acadian region*. Ann. For. Sci. 67: 302. <https://doi.org/10.1051/forest/2009109>

Ministère des Ressources naturelles et des Forêts (MRNF), 2024. *Ressources et industries forestières du Québec, Portrait statistique 2023*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles et des Forêts, Direction du développement et de l'innovation de l'industrie. 145 p. https://cdn-contenu.quebec.ca/cdn-contenu/forets/documents/entreprises/statistiques/RA_portrait-statistiques-industries-forestieres_2023.pdf

Pinheiro, J., D. Bates, S. DebRoy, D. Sarkar et the R Core Team, 2018. *nlme: Linear and nonlinear mixed effects models*. R package version 3.1-137.

Prégent, G., V. Bertrand et L. Charette, 1996. *Tables préliminaires de rendement pour les plantations d'épinette noire au Québec*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles, Direction de la recherche forestière. Mémoire de recherche forestière n° 118. 70 p. www.mrnf.gouv.qc.ca/publications/forets/connaissances/recherche/Pregent-Guy/Memoire118.pdf

Prégent, G., F. Savard et G. Desaulniers, 2001. *Tarif de cubage à diamètre et à longueur variables d'utilisation pour le pin gris en plantation au Québec*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles, Direction de la recherche forestière. Mémoire de recherche forestière n° 139. 41 p. [https://mrnf.gouv.qc.ca/documents/forets/connaissances/recherche/Memoire139.pdf](http://www.mrnf.gouv.qc.ca/documents/forets/connaissances/recherche/Memoire139.pdf)

Prégent, G., G. Picher et I. Auger, 2016. *Tarif de cubage, tables de rendement et modèles de croissance pour les plantations d'épinette de Norvège au Québec*. Gouvernement du Québec, ministère des Forêts, de la Faune et des Parcs, Direction de la recherche forestière. Mémoire de recherche forestière n° 176. 95 p. [https://mrnf.gouv.qc.ca/documents/forets/connaissances/recherche/Memoire176.pdf](http://www.mrnf.gouv.qc.ca/documents/forets/connaissances/recherche/Memoire176.pdf)

R Core Team, 2020. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienne (Autriche). <https://www.R-project.org/>

Rojo, A., X. Perales, F. Sanchez-Rodriguez, J.G. Alvarez-Gonzalez et K. von Gadow, 2005. *Stem taper functions for maritime pine (Pinus pinaster Ait.) in Galicia (northwestern Spain)*. Eur. J. For. Res. 124: 177-186. <https://doi.org/10.1007/s10342-005-0066-6>

- SAS Institute Inc., 2013a. SAS 9.4. Cary, NC: SAS Institute Inc.
- SAS Institute Inc., 2013b. *SAS/ETS® 13.1 User's Guide*. SAS Institute Inc. Cary, NC (États-Unis).
- SAS Institute Inc., 2013c. *SAS/STAT® 13.1 User's Guide*. SAS Institute Inc. Cary, NC (États-Unis).
- Schneider, R., M. Fortin et J.-P. Saucier, 2013. *Équations de défilement en forêt naturelle pour les principales essences commerciales du Québec*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles, Direction de la recherche forestière. Mémoire de recherche forestière n° 167. 40 p. <https://mrnf.gouv.qc.ca/nos-publications/equations-defilement-foret-naturelle/>
- Sharma, M. et R.G. Oderwald, 2001. *Dimensionally compatible volume and taper equations*. Can. J. For. Res. 31(5): 797-803. <https://doi.org/10.1139/x01-005>
- Sharma, M. et J. Parton, 2009. *Modeling stand density effects on taper for jack pine and black spruce plantations using dimensional analysis*. For. Sci. 55(3): 268-282. <https://doi.org/10.1093/forestscience/55.3.268>
- Valentine, H.T. et T.G. Gregoire, 2001. *A switching model of bole taper*. Can. J. For. Res. 31(8): 1400-1409. <https://doi.org/10.1139/x01-061>
- Zakrzewski, W.T., 1999. *A mathematically tractable stem profile model for jack pine in Ontario*. North. J. Appl. For. 16(3): 138-143. <https://doi.org/10.1093/njaf/16.3.138>

Isabelle Auger, stat. ASSQ, M. Sc.

Josianne DeBlois, stat. ASSQ, M. Sc.

Marie-Claude Lambert, M. Sc.

Service du soutien scientifique

Correspondance :

Isabelle Auger
Ministère des Ressources naturelles et des Forêts
Direction de la recherche forestière
2700, rue Einstein, bureau C.1.325.1
Québec (Québec) G1P 3W8
Tél : 1 833-361-0001 poste 606650
Courriel : isabelle.auger@mrnf.gouv.qc.ca

On peut citer la totalité ou une partie de ce texte en indiquant la référence. Citation recommandée :

Auger, I., J. DeBlois et M.-C. Lambert, 2025. *Relations hauteur-diamètre, tarifs de cubage et équations de défilement pour l'épinette noire et le pin gris en plantation au Québec*. Gouvernement du Québec, ministère des Ressources naturelles et des Forêts, Direction de la recherche forestière. Avis technique SSS-10. 31 p.

Annexe 1. Liste des équations de défilement testées, avec leur expression mathématique originale.

Modèle	Équation*
Kozak (1997) [modèle 1995]	$d = \alpha_0 DHP p^{\alpha_1} H X^{\beta_1 X^{0.1} + \beta_2 z^4 + \beta_3 \arcsin(Q) + \beta_4 \left(\frac{1}{e^{DHP/H}} \right) + \beta_5 DHP},$ $X = \frac{1-z^{1/2}}{1-p^{1/2}}, Q = 1 - z^{1/2}$
Kozak (2004) [modèle 01]	$d = \alpha_0 DHP^{\alpha_1} X^{\beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{e^{DHP/H}} \right) + \beta_2 DHP + \beta_3 X^{DHP/H}},$ $X = \frac{1-z^{1/4}}{1-0,01^{1/4}}$
Kozak (2004) [modèle 02]	$d = \alpha_0 DHP^{\alpha_1} H X^{\beta_1 z^4 + \beta_2 \left(\frac{1}{e^{DHP/H}} \right) + \beta_3 X^{0.1} + \beta_4 (1/DHP) + \beta_5 H^Q + \beta_6 X},$ $X = \frac{1-z^{1/3}}{1-p^{1/3}}, Q = 1 - z^{1/3}$
Bi (2000)	$\frac{d}{DHP} = \alpha_0 B^{\beta_1 + \beta_2 \sin(z\pi/2) + \beta_3 \cos(z3\pi/2) + \beta_4 \sin(z\pi/2)/z + \beta_5 DHP + \beta_6 z\sqrt{DHP} + \beta_7 z\sqrt{H}},$ $B = \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} z \right) \right) / \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} p \right) \right)$
Zakrzewski (1999)	$A(h) = \alpha_0 K \frac{z_1^2 + \beta(z_1)^3 + \gamma(z_1)^4}{z_1 - s}, K = \frac{A(niv)(z_0 - s)}{z_0^2 + \beta(z_0)^3 + \gamma(z_0)^4}, z_1 = 1 - (h/H),$ $z_0 = 1 - (niv/H), s = 1 + \theta(H/DHP)$
Valentine et Gregoire (2001)	$A(h) = \alpha_0 A(niv) \left(\frac{H-h}{H-niv} \right)^{\alpha_1 + S_5(h)} \left(\frac{H-h}{H-hcb} \right)^{\alpha_2 S_6(h)},$ $S_5(h) = \frac{\theta_1 H}{1 + (h/\theta_3 H)^{\gamma_1}}, S_6(h) = \frac{(h/hcb)^{\gamma_2}}{1 + (h/hcb)^{\gamma_2}}, hcb = H - \frac{A(niv)}{\theta_4 (H-niv)}$
Lee <i>et al.</i> (2003)	$d = \alpha_0 DHP^{\alpha_1} (1 - z)^{\beta_3 z^2 + \beta_2 z + \beta_1}$
Sharma et Parton (2009)	$\frac{d}{DHP} = \alpha_0 \left(\frac{H-h}{H-niv} \right) \left(\frac{h}{niv} \right)^{\beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2}$
Sharma et Oderwald (2001)	$d^2 = \alpha_0 DHP^2 \left(\frac{H-h}{H-niv} \right) \left(\frac{h}{niv} \right)^{2-\gamma}$
Schneider <i>et al.</i> (2013) [4] + [3a]	$d^2 = \alpha_0 DHP^2 \left(\frac{H-h}{H-niv} \right) \left(\frac{h}{niv} \right)^{2-(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln(t) + \beta_3 e^z + \beta_4 t \cdot z + \beta_5 DHP)}, t = \frac{H-h}{H-niv}$
Schneider <i>et al.</i> (2013) [4] + [3b]	$d^2 = \alpha_0 DHP^2 \left(\frac{H-h}{H-niv} \right) \left(\frac{h}{niv} \right)^{2-(\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 \ln(z) + \beta_3 DHP)}$
Schneider <i>et al.</i> (2013) [4] + [3c]	$d^2 = \alpha_0 DHP^2 \left(\frac{H-h}{H-niv} \right) \left(\frac{h}{niv} \right)^{2-(\beta_0 + e^{\beta_1 z^{\beta_2}} + \beta_3 DHP)}$
Schneider <i>et al.</i> (2013) [4] + [3d]	$d^2 = \alpha_0 DHP^2 \left(\frac{H-h}{H-niv} \right) \left(\frac{h}{niv} \right)^{2-(\beta_0 + z^{\beta_1(1-z)^{\beta_2}} + \beta_3 DHP)}$

* DHP : diamètre à hauteur de poitrine (cm) ; H : hauteur totale (m) ; h : hauteur de la section au-dessus de 0,15 m (m) ; d : diamètre sous écorce à une hauteur h (cm) ; niv : hauteur de mesure du DHP (m) ; $z = h/H$; $p = niv/H$; $A(h)$: aire de la surface de la section à la hauteur h (cm^2) ; $A(niv)$: aire de la surface de la section à la hauteur niv (cm^2) ; et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_7, \beta, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_6, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \theta, \theta_1, \dots, \theta_4$: paramètres à estimer.

Annexe 2. Liste des fonctions de variance testées dans les modèles de défilement.

Fonction de variance	Équation*
Variances homogènes	$Var(\varepsilon_{ijkl}) = \sigma_{res}^2$
Li et Weiskittel (2010) [7]	$Var(\varepsilon_{ijkl}) = \sigma_{res}^2 \left \frac{H_{ijk} - h_{ijkl}}{H_{ijk}} \right ^{2\delta}$
Li et Weiskittel (2010) [8]	$Var(\varepsilon_{ijkl}) = \sigma_{res}^2 \exp \left(2\delta \frac{H_{ijk} - h_{ijkl}}{H_{ijk}} \right)$
de-Miguel <i>et al.</i> (2012)	$Var(\varepsilon_{ijkl}) = \sigma_{res}^2 DHP_{ijk}^{2\delta}$
Valentine et Gregoire (2001)	$Var(\varepsilon_{ijkl}) = \sigma_{res}^2 DHP_{ijk}^{\delta_1} \exp \left(\delta_2 \left(\frac{H_{ijk} - h_{ijkl}}{H_{ijk}} \right)^{\delta_3} \right)$
Lejeune <i>et al.</i> (2009)	$Var(\varepsilon_{ijkl}) = \sigma_{res}^2 (\hat{d}_{ijkl}^2)^{2\delta}$
Schneider <i>et al.</i> (2013)	$Var(\varepsilon_{ijkl}) = \sigma_{res}^2 \left(\delta_1 + \left (H_{ijk} - h_{ijkl}) \times \left \frac{h_{ijkl} - niv_{ijk}}{H_{ijk} - niv_{ijk}} \right \times \left(1 - \left \frac{h_{ijkl} - niv_{ijk}}{H_{ijk} - niv_{ijk}} \right \right)^3 \right ^{2\delta_2} \right)$

* σ_{res}^2 : variance résiduelle ; \hat{d}_{ijkl}^2 : valeur estimée pour la section l de l'arbre k de la placette j de la plantation i (cm^2) ; ε_{ijkl} : erreur résiduelle ; h_{ijkl} : hauteur de la section l au-dessus de 0,15 m (m) ; DHP_{ijk} : diamètre à hauteur de poitrine de l'arbre (cm) ; niv_{ijk} : hauteur de mesure du DHP (m) ; H_{ijk} : hauteur totale de l'arbre (m) ; et $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$: paramètres à estimer.