

## Note de recherche forestière n° 90

### Aire de projection pour la cime d'un arbre

GILLES DÉSAULNIERS \*

F.D.C. 531(047.3)(714)  
L.C. SD 387.B55

#### Résumé

La méthode développée dans ce document et les résultats présentés en exemple montrent la nécessité d'utiliser une technique adéquate pour calculer la projection de la cime d'un arbre sur un plan horizontal. L'arc enveloppant qui joint circulairement deux rayons voisins, en devient le principe. Cette approche se concrétise par les coordonnées polaires dans des équations trigonométriques. Par leur intégration, ces relations expriment la surface d'un secteur selon un angle particulier entre deux rayons différents. La principale formule à retenir est celle-ci :

$$S = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \theta_i (r_i^2 + r_{i+1}^2)$$

Mots-clés : projection verticale, cime, rayon, géométrie.

#### Abstract

The method developed in this report and the examples presented show the necessity of using an appropriate technique for estimating the crown projection onto a horizontal plane. So, the circular arc which links two neighbouring radii, serves as a general principle. This approach is further developed by polar coordinates in the trigonometric functions. These equations stand for the area of a sector depending on a particular angle between two different radii. The most important formula to remember is :

$$S = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \theta_i (r_i^2 + r_{i+1}^2)$$

Key words : vertical projection, tree crown, radius, geometry.

#### Resumen

El método desarrollado en este documento y los resultados presentados en ejemplos muestran la necesidad de utilizar una técnica adecuada para calcular la proyección de la cima de un árbol sobre un plano horizontal. El principio de dicho método se apoya en el arco envolvente que une circularmente dos radios vecinos. Esta aproximación se concreta en la utilización de coordenadas polares en las ecuaciones trigonométricas. Una vez integradas, estas ecuaciones expresan la superficie de un sector según un ángulo particular entre dos radios diferentes. La fórmula principal que hay que recordar es la siguiente :

$$S = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \theta_i (r_i^2 + r_{i+1}^2)$$

Palabras claves : proyección vertical, cima, radio, geometría.

#### Streszczenie

**Powierzchnia rzutu korony drzewa.** Metoda prezentowana w tym artykule oraz rezultaty przytoczone jako przykład wskazują na konieczność używania szczególnej techniki w celu obliczenia powierzchni rzutu pionowego korony drzewa. Określenie linii krzywej która łączy dwa sąsiednie promienie jest podstawą tej zasady (metody). Sposób ten polega na zastosowaniu współrzędnych biegunowych w równaniach trygonometrycznych. Przez ich połączenie, obliczamy powierzchnię jednego wycinka (sektora) według kąta zawartego między dwoma promieniami różnej długości. Oto podstawowe równanie określające tą metodę :

$$S = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \theta_i (r_i^2 + r_{i+1}^2)$$

Słowa kluczowe : rzut pionowy, korona drzewa, promień, geometria.

\* Ph.D., math. stat., chargé de recherche en dendrométrie au Service de la recherche appliquée.

## Introduction

Ce texte répond à une consultation de collègues chercheurs concernant le calcul de la surface qui est obtenue par la projection verticale de la cime d'un arbre. Cette demande particulière de ne traiter que l'aspect mathématique se restreignait à huit rayons réguliers autour du pied de l'arbre. Deux rayons voisins s'écartent alors de  $45^\circ$ , soit  $(\pi/4)$  radian. Une présentation m'a permis d'expliquer la solution sous forme de formules à un groupe d'intéressés. Le principe de base constituait la courbe d'allure circulaire entre les rayons variables. Deux autres démarches sont aussi considérées à titre de comparaison puisqu'elles sont parfois utilisées. Cette note présente une approche générale.

## Méthode

Il s'agit de déterminer l'aire de la cime qui se trouve projetée sur un plan horizontal. Il y a ainsi un nombre quelconque «  $n$  » de secteurs avec divers rayons  $r_i$  en cm et différents angles  $\theta_i$  en radians qui couvrent tout le pourtour de l'arbre comme la figure 1 le montre. La somme des angles atteint la valeur  $2\pi$  :

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$$

où  $\pi = 3,1415926536\dots$

De plus, comme le périmètre est fermé, le rayon  $r_1$  orienté vers le nord sert de côté autant pour le premier secteur que pour le dernier :  $r_1 \equiv r_{n+1}$ .

### Courbe d'allure circulaire

La courbe d'allure circulaire joignant deux rayons voisins s'exprime par une variable  $\rho$  en fonction de la variable  $u$  sous la forme suivante :

$$\rho_i^2 = r_i^2 \cos^2 u + r_{i+1}^2 \sin^2 u$$

où  $0 \leq u \leq \pi/2$

avec  $\min(r_i, r_{i+1}) \leq \rho_i \leq \max(r_i, r_{i+1})$ .

Un exemple se trouve à la figure 2, dont l'angle  $u$  est exprimé en degrés plutôt qu'en radians pour qu'on puisse mieux comprendre : le hasard a permis que les rayons  $r_1$  et  $r_5$  appartiennent à la même droite. Des quantités attribuées aux angles et aux rayons se trouvent dans le tableau à la fin du texte.

Des valeurs particulières constituent le tableau suivant :

$u$	$\sin u$	$\cos u$	$\rho_i$
0	0	1	$r_i$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\left(\frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{2}\right)^{1/2}$
$\pi/2$	1	0	$r_{i+1}$

Si tous les rayons sont égaux, c'est-à-dire  $r_i = r_1$  pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , ceci se traduit par :

$$r_i = r_1, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

alors

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= r_1^2 \cos^2 u + r_1^2 \sin^2 u \\ &= r_1^2 (\underbrace{\cos^2 u + \sin^2 u}_1) \\ &= r_1^2. \end{aligned}$$

Il faut maintenant relier l'angle  $\theta_i$  du  $i^{\text{e}}$  secteur avec la variable indépendante  $u$ . En définissant une variable angulaire  $w$  par :

$$0 \leq w \leq \theta_i$$

et la variable continue  $u$  par

$$u = \frac{\pi w}{2\theta_i} \text{ avec } du = \frac{\pi}{2\theta_i} dw,$$

l'intervalle

$$0 \leq u \leq \pi/2$$

se vérifie selon le tableau suivant :

$w$	$u$
0	0
$\theta_i$	$\pi/2$

L'équation de la variable  $\rho_i$  se transforme alors :

$$\rho_i^2 = r_i^2 \cos^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_i}\right) + r_{i+1}^2 \sin^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_i}\right).$$

Les intégrales indéfinies pour les carrés du sinus et du cosinus se présentent sous la forme :

$$\int \sin^2 u \, du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + C$$

$$\int \cos^2 u \, du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C$$

Elles sont tirées des numéros 141 et 142 à la page 662 du livre de Granville et coll. (1962).

Par la suite, il s'agit d'établir les formules pour déterminer la surface en  $\text{cm}^2$  sous la courbe pour un secteur. Il suffit d'en choisir un, puis de généraliser le processus pour les autres. La surface correspondante  $S_1$  du premier secteur ( $i=1$ ) devient :

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_1} \rho_1^2 \, dw$$

avec  $\theta_1 = 40^\circ = 2\pi/9$  dans l'exemple

(p. 322 dans Granville et coll. 1962)

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_1} \left( r_1^2 \cos^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_1}\right) + r_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_1}\right) \right) dw$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\theta_1} r_1^2 \cos^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_1}\right) dw + \int_0^{\theta_1} r_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_1}\right) dw \right)$$

$$= \frac{r_1^2}{2} \int_0^{\theta_1} \cos^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_1}\right) dw + \frac{r_2^2}{2} \int_0^{\theta_1} \sin^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_1}\right) dw$$

$$= \frac{2r_1^2 \theta_1}{2\pi} \int_0^{\theta_1} \left( \cos^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_1}\right) \right) \left( \frac{\pi dw}{2\theta_1} \right) +$$

$$\frac{2r_2^2 \theta_1}{2\pi} \int_0^{\theta_1} \left( \sin^2\left(\frac{\pi w}{2\theta_1}\right) \right) \left( \frac{\pi dw}{2\theta_1} \right)$$

$$= \frac{\theta_1 r_1^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du + \frac{\theta_1 r_2^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du$$

$$= \frac{\theta_1 r_1^2}{\pi} \left[ \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \sin 2u \right]_0^{\pi/2} + \frac{\theta_1 r_2^2}{\pi} \left[ \frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin 2u \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\theta_1 r_1^2}{\pi} \left( \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + 0 \right) + \frac{\theta_1 r_2^2}{\pi} \left( \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{\theta_1 r_1^2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1 r_2^2}{\pi} \times \frac{\pi}{4}$$

$$S_1 = \frac{\theta_1}{4} (r_1^2 + r_2^2).$$

Si  $n = 1$  (secteur), alors  $\theta_1 = 2\pi$  et

$$S_1 = \frac{\theta_1}{4} (r_1^2 + r_2^2)$$

$$= \frac{\theta_1}{4} (2 r_1^2) \text{ car } r_1 = r_2$$

$$= \frac{2\pi \times 2 r_1^2}{4}$$

$$= \pi r_1^2.$$

Cette dernière expression représente la surface du cercle à rayon  $r_1$ , ce qui semble logique !

L'aire  $S$  sous la cime avec  $n$  secteurs s'exprime par la formule :

$$S = \sum_{i=1}^n S_i$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \theta_i (r_i^2 + r_{i+1}^2).$$

Celle-ci constitue le point central de cette note.

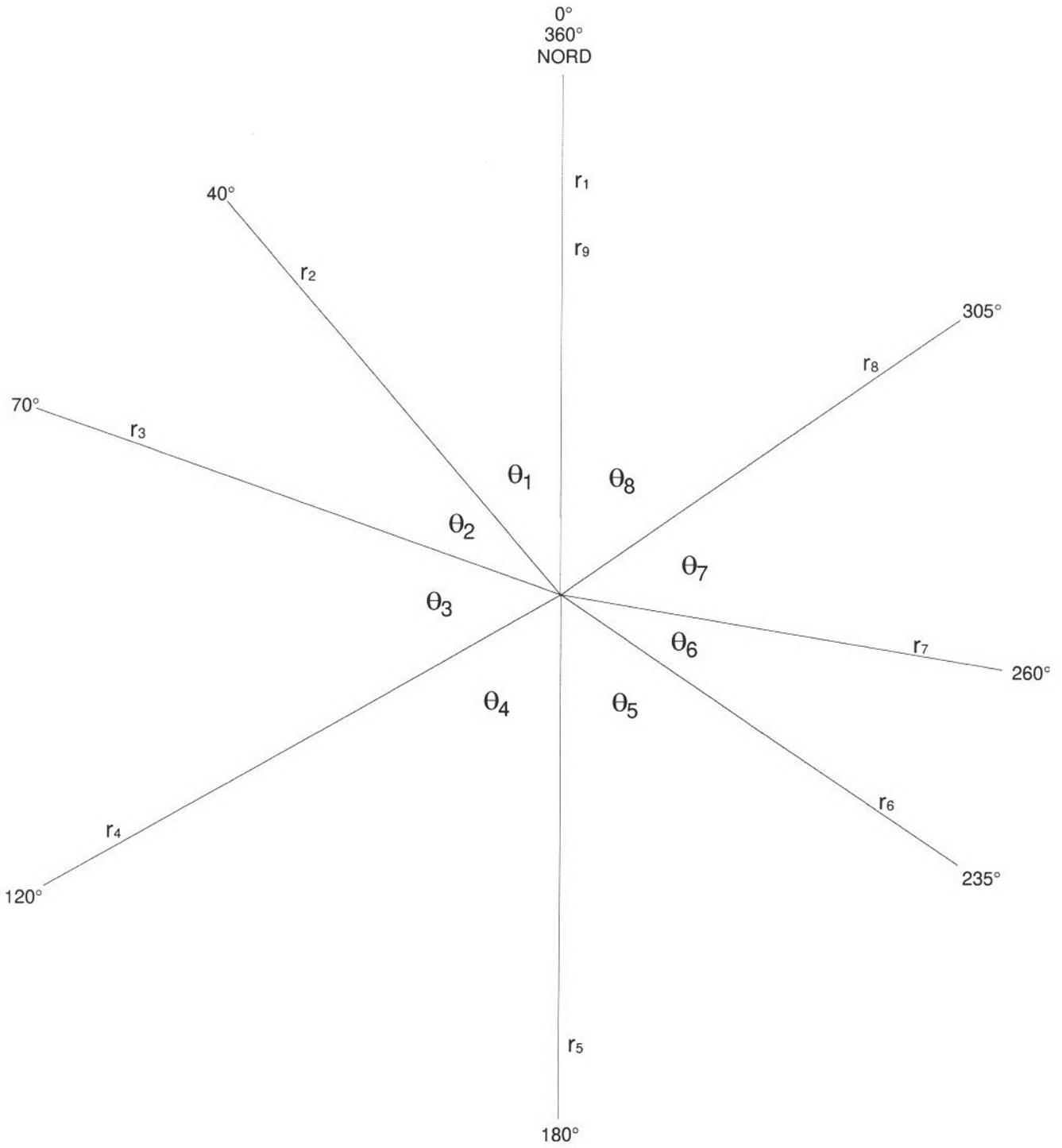


Figure 1. Projection verticale de la cime.

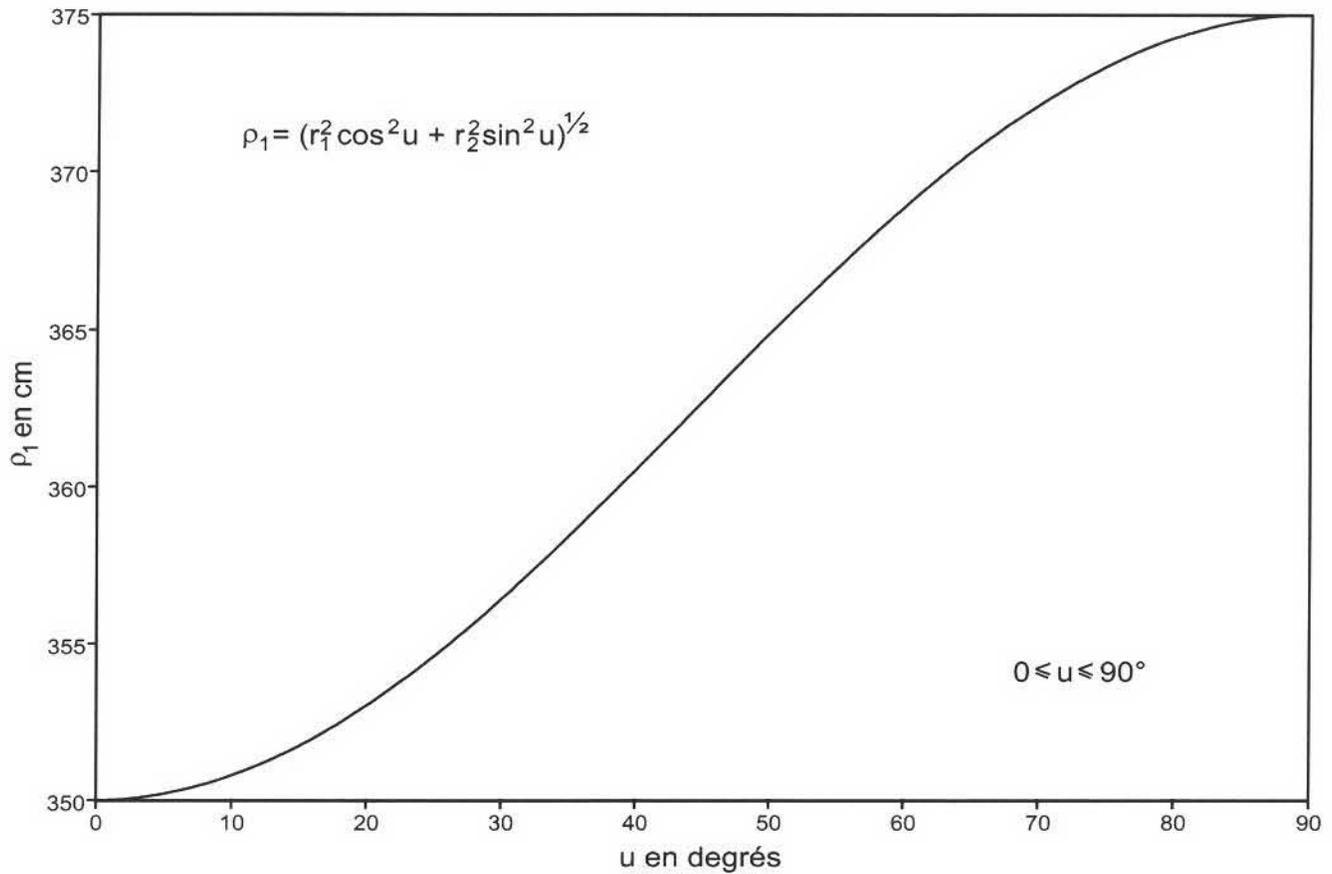


Figure 2. Rayon  $\rho_1$  en cm selon l'angle  $u$  de l'arc circulaire entre deux rayons différents :  $r_1 = 350$  et  $r_2 = 375$ .

Pour le cas particulier où les angles des  $n$  secteurs sont égaux :

$$\theta_i = \frac{2\pi}{n},$$

l'aire totale devient :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{n} (r_i^2 + r_{i+1}^2) \\ &= \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n (r_i^2 + r_{i+1}^2) \end{aligned}$$

$$S = \frac{\pi}{2n} \times 2 \sum_{i=1}^n r_i^2$$

en rappelant que  $r_1 \equiv r_{n+1}$

$$S = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2$$

où l'expression :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^2$$

calcule le carré de la moyenne quadratique des rayons qui prennent généralement diverses valeurs pour mieux s'ajuster à la configuration irrégulière de la cime. Il arrive parfois que le diamètre soit mesuré au lieu du rayon. Pour autant que la tige occupe le centre du diamètre, il faut alors ajuster ces particularités à la présente approche générale.

### Courbe elliptique

Il y a lieu de vérifier la pertinence d'une courbe enveloppante sous la forme d'une ellipse, pour mieux caractériser la projection d'une cime.

Soit  $r_1$  le demi-axe vertical de l'ellipse et « a » le demi-axe horizontal qui se trouve inconnu.

Le rayon  $r_2$  connu relie le centre à un point de la courbe selon un angle  $\theta_1$  avec la verticale  $r_1$  comme le montre la figure 3.

La formule de l'ellipse s'exprime sous la forme suivante :

$$r_2^2 = \frac{a^2 r_1^2}{r_1^2 \sin^2 \theta_1 + a^2 \cos^2 \theta_1}$$

où le rayon prend le carré ; il y a lieu de se référer à la page 285 de Zwillingier (1996). Il faut cependant y observer que si un seul des deux rayons (a ou  $r_1$ ) se trouve à zéro, le résultat  $r_2$  reste nul pour toute valeur d'angle. Ceci indique qu'une mesure prise dans un secteur sans cime priverait l'arbre de toute aire dans l'angle choisi  $\theta_1$ , aucune courbe ne la reliant au sommet de l'autre rayon. Il y aurait discontinuité.

En isolant l'inconnue « a » de l'équation précédente :

$$a^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 \sin^2 \theta_1}{r_1^2 - r_2^2 \cos^2 \theta_1},$$

le demi-axe horizontal est maintenant déterminé.

Pour  $0 < \theta_1 \leq \pi/2$ , la valeur de « a » est définie. Pour  $\theta_1 = 0$ , il existe une indétermination :

$$a^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 \sin^2 \theta_1}{r_1^2 - r_2^2 \cos^2 \theta_1} = \frac{0}{0}$$

puisqu'alors  $r_1^2 = r_2^2$ . Il s'agit de lever cette indétermination en dérivant le numérateur et le dénominateur par rapport à  $\theta_1$  :

$$a^2 = \frac{2 r_1^2 r_2^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{2 r_2^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1} = r_1^2.$$

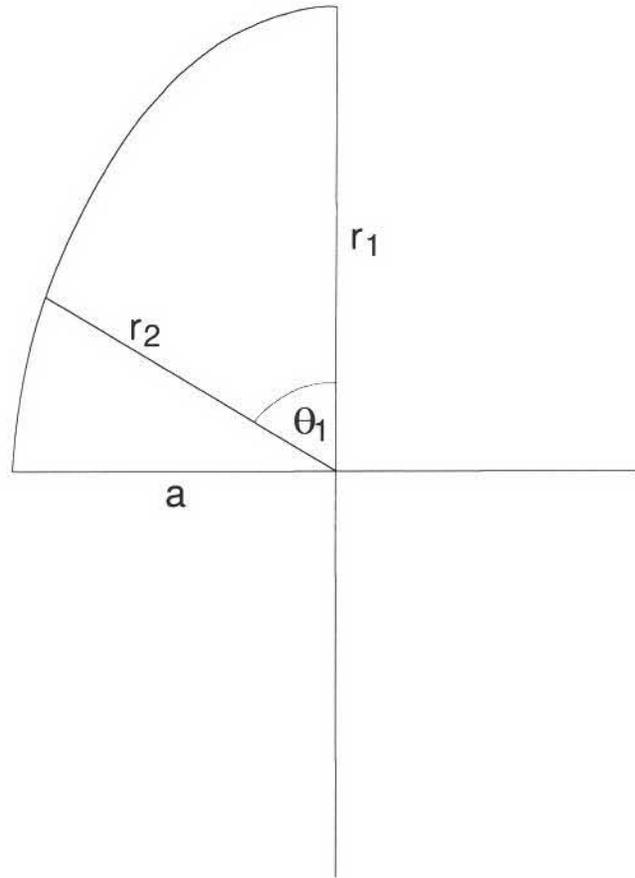


Figure 3. Ellipse avec demi-axes  $r_1$  et a .

Cette dernière expression :

$$a^2 = r_1^2$$

considère que les deux demi-axes de l'ellipse sont égaux ; ceci désigne alors un cercle de rayon  $r_1$ .

Cependant, si la projection de la cime forme réellement une ellipse de demi-axes a et b, sa superficie s'exprime alors par :

$$E = \pi ab ;$$

l'aire du cercle équivalent  $\pi r^2$  indique un rayon sans biais :

$$r = \sqrt{ab} .$$

Cette façon se trouve déjà utilisée pour calculer le DHP d'un arbre en mesurant deux diamètres perpendiculaires : la moyenne géométrique.

Si  $\theta_1 = \pi$  et si  $r_1 = r_2$ , on se retrouve dans l'indétermination précédente où  $a^2 = r_1^2$ , soit un cercle. Par contre, si  $\theta_1 = \pi$  mais  $r_1 \neq r_2$ , ce n'est plus une ellipse puisque les deux demi-axes d'un même axe se trouvent différents. Donc l'ellipse ne convient pas à ce genre de problème pour la projection de la cime d'un arbre sur un plan horizontal.

#### Approches différentes

La surface d'un triangle où un segment droit unit les sommets, lorsque l'angle au centre et ses deux côtés sont connus, est :

$$T_i = \frac{1}{2} r_i r_{i+1} \sin \theta_i .$$

Si cet angle est plat :  $\theta_1 = \pi$ , le triangle se réduit au segment formé par les deux côtés et la surface se trouve nulle.

La somme de ces  $n$  triangles devient :

$$T = \sum_{i=1}^n T_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i r_{i+1} \sin \theta_i .$$

L'approche des triangles constitue pourtant une bonne approximation de la surface de projection de la cime si le nombre  $n$  de triangles devient très grand. Toutefois, les mesures de cime se révéleraient vite trop onéreuses... La différence d'aire entre le secteur et le triangle au centre correspond à la superficie comprise entre l'arc et la corde. C'est pourquoi l'approche par secteur s'avère plus précise que celle par triangle.

La superficie « A » de la projection, lorsque la moyenne arithmétique des rayons sert à calculer le cercle correspondant sans considérer les angles, s'exprime par les formules suivantes :

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \text{ et}$$

$$A = \pi \bar{r}^2 .$$

Cette expression devient l'aire du cercle de rayon moyen.

Ainsi les aires en  $\text{cm}^2$  s'expriment selon chaque approche :

secteurs	S = 383 450,47
triangles	T = 337 717,97
moyenne arithmétique	A = 382 101,12

#### Exemple avec (n = 8) rayons <sup>1</sup>

i	$\theta_i$ (degrés)	$\theta_i$ (cumul) (degrés)	$\theta_i$ (radians)	$r_i$ (cm)	$S_i$ (secteur) ( $\text{cm}^2$ )	$T_i$ (triangle) ( $\text{cm}^2$ )
1	40	40	0,6981	350	45 923,98	42 182,94
2	30	70	0,5236	375	39 351,72	37 500,00
3	50	120	0,8727	400	63 180,92	55 155,20
4	60	180	1,0472	360	61 581,76	50 662,49
5	55	235	0,9599	325	46 946,63	39 933,66
6	25	260	0,4363	300	21 339,38	20 602,64
7	45	305	0,7854	325	45 484,37	40 791,22
8	55	360	0,9599	355	59 641,72	50 889,82
somme	360		6,2832	2 790	383 450,47	337 717,97
moyenne	45		0,7854	348,75	47 931,31	42 214,75

<sup>1</sup> Il faut se référer à la figure 1.

## Remarque

Il paraît primordial d'accorder une attention particulière à la précision des observations, d'autant plus que l'aire d'une cime projetée peut s'exprimer en fonction du DHP et de la hauteur totale selon un effectif trop souvent minimal d'arbres échantillonnés. La régression mathématique permet d'estimer les coefficients qui établissent le lien entre ces variables dendrométriques. Par la suite, la seule connaissance de ces mesures (DHP, HT) sur chaque arbre aboutit à l'évaluation de l'aire de sa cime par cette équation.

## Conclusion

La méthode circulaire constitue une approche rigoureuse pour calculer la superficie de la projection d'une cime sur un plan horizontal. Elle s'applique à chacun des secteurs qui couvrent la base de l'arbre ; les côtés du secteur peuvent être variables avec un angle au centre qui lui est particulier.

## Remerciements

Je désire exprimer ma reconnaissance à Mme Sylvie Bourassa qui a courageusement dactylographié ce texte rempli de formules mathématiques, à M. Lévis Beaulieu pour les dessins ; au professeur Jacques Bélanger, à Mme Julie Jacques, M.Sc.stat., à MM. Jean-Pierre Saucier, D.Sc., et Michel Huot, M.Sc.for., pour l'évaluation du document ; au professeur Philippe Capéraà et à M. Tadeusz Rycabel, M.Sc.for., pour la traduction respective des résumés en espagnol et en polonais ; à M. Fabien Caron, M.A. (Géographie), pour la révision et l'édition. Il faut remercier les collègues qui m'ont consulté et les autres qui sont intéressés par ce sujet, pour leurs encouragements à produire cette note.

## Bibliographie

- COLE, W.G. et C.G. LORIMER, 1994. *Predicting tree growth from crown variables in managed northern hardwood stands*. Forest Ecology and Management 67 : 159-175.
- DRINKWATER, M.H., 1960. *Crown release of young sugar maple*. Can. Dept. North. Aff. and National Res., Forestry Branch, For. Res. Div., Tech. Note 89.
- GRANVILLE, W.A., P.F. SMITH et W.R. LONGLEY, 1962. *Éléments de calcul différentiel et intégral*. Trad. par P. Commény. Éd. Vuibert, Paris. 680 p.
- HOLMES, M.J. et D.D. REED, 1991. *Competition indices for mixed species northern hardwoods*. For. Sc. 37(5) : 1338-1349.
- PARDÉ, J., 1961. *Dendrométrie*. Éd. École nat. des eaux et forêts ; Nancy, France. 350 p.
- SEYMOUR, S. et D.M. SMITH, 1987. *A new stocking guide formulation applied to eastern white pine*. For. Sc. 33(2) : 469-484.
- SELBY, S.M., 1971. *Standard mathematical tables*. 19<sup>e</sup> éd. de The Chemical Rubber Co., Cleveland, USA. x + 710 p.
- SMITH, H.C. et C.B. GIBBS, 1970. *A guide to sugarbush stocking*. USDA, For. Serv., Northeastern For. Exp. Stn., Res. Paper NE-171.
- STOUT, S.L., D.A. MARQUIS et R.L. ERNST, 1987. *A relative density measure for mixed species stands*. Journal of Forestry, juillet : 45-47.
- SZYMAŃSKI, S., 1986. *Ekologiczne podstawy hodowli lasu*. (Base écologique de la sylviculture). Éd. d'État pour l'Agriculture et la Foresterie. Varsovie, Pologne. 463 p.
- TUBBS, C.H., 1977. *Root-crown relations of young sugar maple and yellow birch*. USDA For. Serv., North Central For. Exp. Stn. Res. Note NC-225.
- TUCKER, G.F., J.P. LASOIE et T.J. FAHEY, 1993. *Crown architecture of stand-grown sugar maple (Acer saccharum Marsh.) in the Adirondack Mountains*. Tree Phys. 13 : 297-310.
- UZOH, F.C.C. et M.W. RITCHIE, 1996. *Crown area equations for 13 species of trees and shrubs in northern California and southwestern Oregon*. USDA For. Serv., Pac. Southwest Res. Station. Albany, Ca. Res. Paper PSW-RP-227. 13 p.
- VYGODSKI, M., 1975. *Aide-mémoire de mathématiques supérieures*. Trad. par G. Der. Mégréditchian. Éditions Mir, Moscou, URSS. 861 p.
- ZWILLINGER, D., 1996. *Standard mathematical tables and formulae*. 30<sup>e</sup> éd. CRC Press. Boca Raton, USA. xxii + 812 p.

RN98-3069

ISBN 2-550-33418-3

Dépôt légal 1998

Bibliothèque nationale du Québec

Bibliothèque nationale du Canada

© 1998 Gouvernement du Québec



Gouvernement du Québec  
Ministère des Ressources  
naturelles