



ÉQUATION DU DÉFILEMENT D'UN TRONÇON  
FONDEMENT DU CUBAGE DES ARBRES  
EN VUE DU DÉBITAGE

par G. Désaulniers

recherche

Québec ☐☐

GILLES DÉSAULNIERS est bachelier en mathématique statistique depuis 1970, maître ès sciences (dendrométrie) depuis 1973 et docteur ès sciences (entomologie) depuis 1986, ces trois diplômes lui ayant été décernés par l'Université Laval. Statisticien occasionnel au ministère des Terres et Forêts de 1970 à 1975 – période pendant laquelle il a aussi enseigné – il est depuis 1976 à l'emploi de la Recherche forestière. Il y a travaillé à la mise au point d'une banque de données et a instauré un système informatisé de comptabilité du budget de la Recherche. Il collabore, entre autres, à la mise sur pied de méthodes de contrôle de la qualité, de mesurage, de cubage et d'échantillonnage, tant à la Direction de la R & D que dans d'autres organismes du ministère de l'Énergie et des Ressources.

Depuis de nombreuses années, chacun des Mémoires et des autres rapports publiés par la Recherche forestière est révisé par un comité *ad hoc* d'au moins trois membres recrutés aussi bien à l'intérieur du Ministère que dans le milieu universitaire, la fonction publique fédérale ou les autres milieux de la recherche. Les responsables de la Recherche remercient les scientifiques qui ont accepté bénévolement de revoir le texte présenté ici et de participer ainsi à la diffusion des résultats des recherches menées au ministère de l'Énergie et des Ressources (Forêts).

Les publications de la Recherche forestière sont produites et diffusées à même les budgets de recherche et de développement, comme autant d'étapes essentielles à la réalisation de chaque projet ou expérience. En conséquence, ces documents sont, par définition, à *tirage limité* et à *diffusion restreinte*. Adresser toute demande au:

Service du transfert de technologie  
Ministère de l'Énergie et des Ressources  
2700, rue Einstein  
SAINTE-FOY (Québec) Canada  
G1P 3W8

ÉQUATION DU DÉFILEMENT D'UN TRONÇON:  
FONDEMENT DU CUBAGE DES ARBRES  
EN VUE DU DÉBITAGE

par

GILLES DÉSAULNIERS, *Ph.D.*

MÉMOIRE n° 69  
Deuxième édition, revue et corrigée

GOUVERNEMENT DU QUÉBEC  
MINISTÈRE DE L'ÉNERGIE ET DES RESSOURCES (FORÊTS)  
DIRECTION DE LA RECHERCHE ET DU DÉVELOPPEMENT  
SERVICE DE LA RECHERCHE APPLIQUÉE

1989

Ce mémoire constitue un rapport partiel du projet de recherches R-81301  
(anciennement TD 79-2)

ISBN 2-550-19679-1

(Première édition, 1980: ISBN 2-550-01597-5)

Dépôt légal

Bibliothèque nationale du Québec

## AVANT-PROPOS

Le Service de l'inventaire forestier (S.I.F.) a entrepris des recherches sur l'établissement d'une méthodologie scientifique adéquate pour construire un tarif de cubage d'utilisations pour chaque essence, car un arbre pourra être débité en différentes utilisations selon des rayons minimaux. Le Service avait reçu ce mandat du ministère des Terres et Forêts (M.T.F.), devenu le ministère de l'Énergie et des Ressources (M.E.R.) du Québec. Le tarif permettra d'instaurer un emploi optimal des bois abattus et d'évaluer le volume des peuplements dont les implications se feront sentir sur l'allocation des approvisionnements.

Les différents aspects de ce problème dendrométrique ont suscité la production de quelques rapports internes dont la désignation apparaît à la bibliographie. La partie mathématique a été abordée par DÉSAULNIERS (1971; 1972b) dans des rapports qui traitent de divers sujets de probabilité et de statistique comprenant l'analyse de sondages antérieurs, la grandeur, la répartition et la méthode d'échantillonnage, le choix des mesures, les modèles du défilement et des tarifs, la méthode de cubage et le contrôle de qualité lors de l'exécution des travaux.



## REMERCIEMENTS

Il faut souligner la collaboration constante fournie par le Dr Yvon Richard, ingénieur forestier, par Jean-Yves Perron, ingénieur forestier et par Martin Lessard, C.D.P., analyste en informatique, pendant cette recherche: leur critique a quelque peu poli le fond et la forme du texte. De plus, il faut savoir reconnaître le soutien du technicien et des techniciennes en informatique qui ont successivement exécuté les divers travaux sur les consoles: Éric Auclair, Francine Langevin et Sylvie Lefrançois. Enfin soulignons le travail des graphistes du Service de la recherche forestière: Lévis Beaulieu, Gaétan Cloutier et Raymond Castonguay; des copistes: Linda Jobin et Nicole Durand; de l'éditeur scientifique: Fabien Caron.

Il faut ajouter une reconnaissance particulière à d'autres techniciens et techniciennes en informatique qui ont testé et utilisé ce progiciel pour effectuer le cubage d'arbres depuis la première édition et pour permettre les modifications de cette deuxième. Ainsi, y ont contribué: Sylvie Poulin, Claude Marcoux, Jean Huot, Albert Pelchat et Nicole Laquerre.





## RÉSUMÉ

Cette recherche se situe dans le cadre de la construction d'un tarif général de cubage au Québec en vue d'une utilisation optimale de l'arbre. Elle améliore l'ajustement du modèle de l'équation du défilement en exprimant le rayon en fonction du niveau où il se situe:  $r = f(h)$  et en ajoutant un terme à l'équation pour refléter le défilement plus accentué entre la hauteur de souche et de poitrine (15 et 130 cm). Ainsi, l'équation complète du défilement devient le polynôme:

$$r = (H-h) \left( \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 + \beta_4 \text{Max}(0, 1-(h \div 115)^\lambda) \right)$$

où  $H$  désigne la hauteur totale de la tige qui contient le tronçon à cuber et  $\lambda$ , l'amplitude du surplus de défilement.

Lorsque les coefficients  $\beta_i$  de cette régression sont estimés par la méthode des moindres carrés, il faut entreprendre le calcul du volume entre les niveaux  $h_I$  et  $h_S$ . Cette méthode s'appelle «le volume de révolution du défilement» (V.R.D.) et se représente par la formule:

$$V(h_I, h_S) = \pi \int_{h_I}^{h_S} r^2 dh$$

En fixant des rayons minimaux d'utilisations, l'équation du défilement permet de déterminer les niveaux correspondants, puis de constituer un système de débitage des tronçons par longueur et par volume. Le système appelé DÉBUTRONC, écrit en langage APL, forme un processus dynamique de type conversationnel facile à utiliser par ceux qui désirent cuber leurs arbres.

# ABSTRACT

*This research is part of the design for a Quebec general volume table in view of optimum tree use. It improves fitting of the taper equation model by expressing radius as a function of the level where it is measured:  $r = f(h)$ , and by adding a term to the equation to reflect the more pronounced taper between butt and breast heights (15 and 130 cm). Hence, the complete taper equation becomes the polynomial:*

$$r = (H-h) \left( \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 + \beta_4 \text{Max}(0, 1-(h-115)^\lambda) \right)$$

*where H represents total stem height which holds the log to be measured, and  $\lambda$  is the amplitude of taper surplus.*

*When the  $\beta_1$  coefficients in this regression are estimated through the least square method, computation of volume between levels  $h_I$  and  $h_S$  must be undertaken. This method is called "taper revolution volume" (T.R.V. or V.R.D.) and is represented by the formula:*

$$V(h_I, h_S) = \pi \int_{h_I}^{h_S} r^2 dh$$

*By fixing minimum utilization radii, the taper equation can be used to determine the corresponding levels, and then to make up a system of log sawing by length and by volume. The system is called DÉBUTRONC and is written in the APL language: it is a dynamic process of the conversational type, easy to use by those who want to measure their trees.*

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                        | page |
|--------------------------------------------------------|------|
| AVANT-PROPOS . . . . .                                 | iii  |
| REMERCIEMENTS . . . . .                                | v    |
| RÉSUMÉ . . . . .                                       | vii  |
| <u>ABSTRACT</u> . . . . .                              | ix   |
| TABLE DES MATIÈRES . . . . .                           | xi   |
| LISTE DES FIGURES . . . . .                            | xiii |
| LISTE DES TABLEAUX . . . . .                           | xv   |
| INTRODUCTION . . . . .                                 | 1    |
| CHAPITRE I - DÉFILEMENT . . . . .                      | 5    |
| 1.1 Principe . . . . .                                 | 5    |
| 1.2 Choix de l'équation . . . . .                      | 6    |
| 1.3 Essai du modèle . . . . .                          | 8    |
| 1.4 Sophistication du modèle . . . . .                 | 8    |
| 1.5 Inversion de la dépendance des variables . . . . . | 20   |
| CHAPITRE II - VOLUME . . . . .                         | 23   |
| 2.1 Formulation . . . . .                              | 23   |
| 2.2 Base mathématique du cubage . . . . .              | 24   |
| 2.3 Système de cubage . . . . .                        | 33   |
| CONCLUSION . . . . .                                   | 41   |

|                                                                        | page |
|------------------------------------------------------------------------|------|
| BIBLIOGRAPHIE . . . . .                                                | 43   |
| LEXIQUE . . . . .                                                      | 47   |
| APPENDICE A - PRÉSENTATION DES FONCTIONS <u>APL</u> . . . . .          | 51   |
| APPENDICE B - EXEMPLE DE SORTIE AVEC LE SYSTÈME <u>DÉBUTRONC</u> . . . | 73   |
| APPENDICE C - RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ . .          | 81   |

## LISTE DES FIGURES

|                                                            | page |
|------------------------------------------------------------|------|
| Figure 1 Identification des mesures sur un arbre . . . . . | 3    |
| Figure 2 Schéma des tronçons d'un bouleau jaune . . . . .  | 76   |





## LISTE DES TABLEAUX

|                                                                                                                              | page |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tableau 1    Étude du défilement d'un arbre imaginaire<br>ayant $H = 1850$ cm . . . . .                                      | 9    |
| Tableau 2    Étude du défilement de l'EPN pour $\lambda = 0,5$ et<br>$H = 2400$ cm avec renflement au niveau 1300 cm . . . . | 13   |
| Tableau 3    Étude du défilement de l'EPN pour $\lambda = 0,5$ et<br>$H = 2400$ cm sans renflement au niveau 1300 cm . . . . | 14   |
| Tableau 4    Coefficients de régression pour le défi-<br>lement de l'EPN selon les $\lambda$ . . . . .                       | 15   |
| Tableau 5    Ajustement du défilement de l'EPN selon<br>différents $\lambda$ . . . . .                                       | 16   |
| Tableau 6    Étude du défilement du SAB pour $\lambda = 0,5$ et<br>$H = 2120$ cm . . . . .                                   | 17   |
| Tableau 7    Coefficients de régression pour le défi-<br>lement du SAB selon les $\lambda$ . . . . .                         | 18   |
| Tableau 8    Ajustement du défilement du SAB selon<br>différents $\lambda$ . . . . .                                         | 19   |
| Tableau 9    En-tête du système <u>DÉBUTRONC</u> . . . . .                                                                   | 35   |
| Tableau 10   Dialogue pour chaque tronçon dans le<br>système <u>DÉBUTRONC</u> . . . . .                                      | 36   |
| Tableau 11   Sommation du cubage selon l'utilisation pour<br>tous les tronçons par le système <u>DÉBUTRONC</u> . . . . .     | 39   |
| Tableau 12   Synthèse des fonctions <u>APL</u> . . . . .                                                                     | 54   |
| Tableau 13   Matrices NR des cinq tronçons d'un BOJ . . . . .                                                                | 77   |
| Tableau 14   Système <u>DÉBUTRONC</u> appliqué aux cinq tronçons<br>d'un BOJ . . . . .                                       | 78   |



## INTRODUCTION

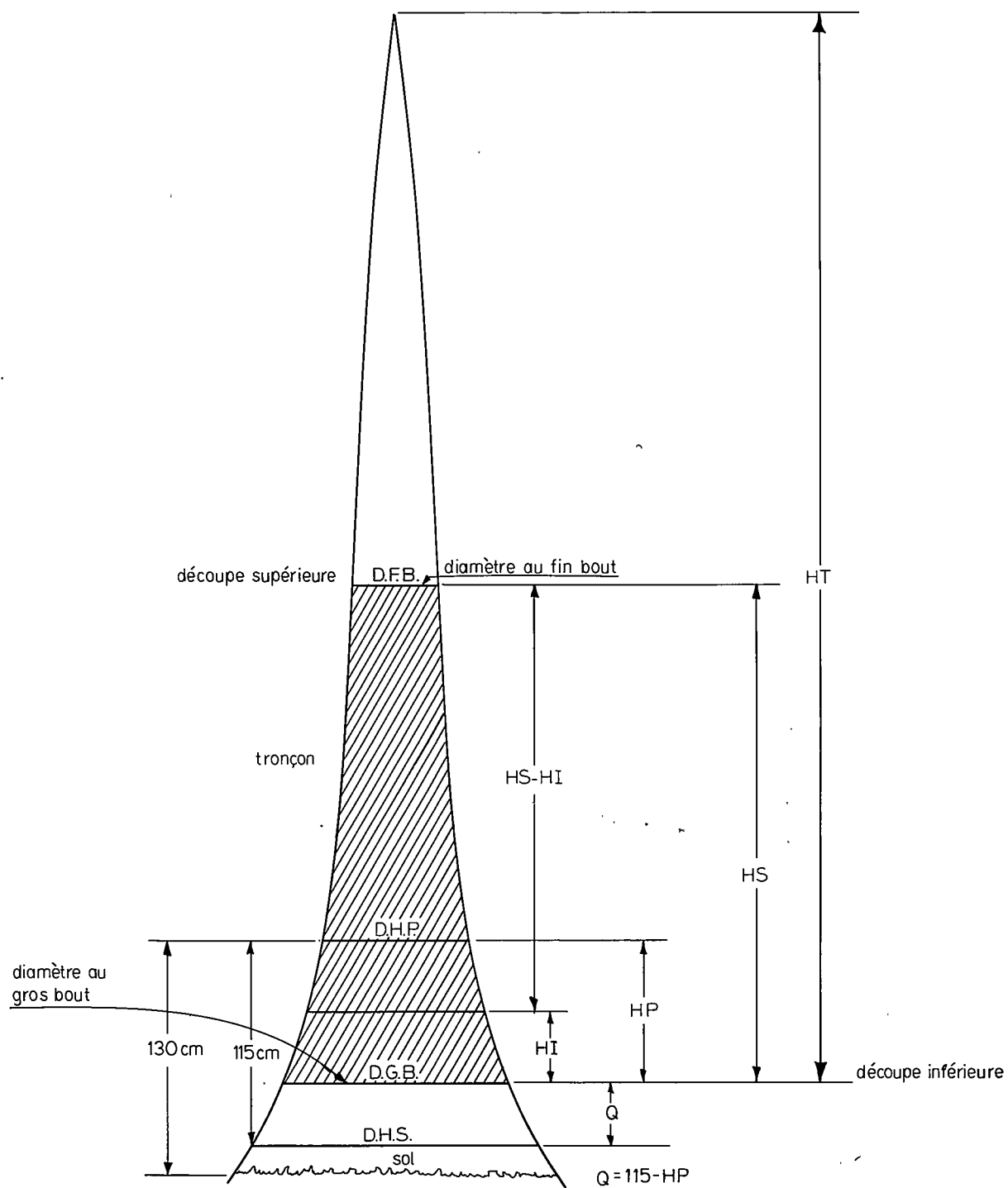
Ce mémoire présente une méthodologie forestière, mathématique et informatique du cubage individuel des tronçons pour des niveaux déterminés par les rayons minimaux d'utilisations. Cette recherche dendrométrique a été réalisée par épisodes de réflexions, d'essais et d'analyses multiples à la suite d'échantillonnages réalisés par le Service de l'inventaire forestier (S.I.F.). Il s'agit de trouver un modèle d'équation qui s'ajuste fidèlement au défilement de chaque tronçon, de le débiter selon les utilisations et d'en cuber les parties par la méthode du volume de révolution du défilement (V.R.D.).

Lorsqu'un arbre sert d'échantillon suivant un processus de choix, il faut recueillir différentes observations dendrométriques le long de la tige entière, flèche terminale incluse. Un effort particulier sera fourni pour augmenter la précision des mesures même si certaines personnes croient faussement que la tolérance d'une erreur relative sur le résultat final leur permet de relâcher l'exactitude de la prise de données dans la même proportion. Il faut remarquer que la variance constitue la mesure de la dispersion naturelle des individus et non celle des erreurs commises lors de la collecte; l'analyse statistique pose, comme première hypothèse, que les valeurs observées s'avèrent rigoureusement exactes.

La hauteur totale de l'arbre représente la première information à recueillir: elle s'étend du niveau de la souche à l'extrémité de la flèche terminale. La figure 1 identifie sur un arbre plusieurs mesures et repères dont les définitions se retrouvent au lexique; toutes ces mesures se réfèrent au SI. A différents niveaux répartis sur toute la longueur et selon une intensité déterminée par des normes précises pour l'exécution d'un tel sondage, l'estimateur prend les diamètres tout en évitant les défauts de la tige. Trois observations forment le relevé minimal pour déterminer les coefficients de l'équation du défilement et de là, le volume; évidemment, un plus grand nombre augmente la fiabilité de l'estimé: l'expérience dicte un minimum de cinq points par tronçon. Il faut fixer l'espacement maximal entre deux niveaux consécutifs; au niveau de la hauteur totale, le diamètre devient zéro. Le diamètre à hauteur de poitrine (d.h.p.) et le diamètre au niveau (0) de la souche (d.h.s.) appartiennent aussi à l'échantillonnage d'un arbre entier. Le d.h.p. et la hauteur totale d'un arbre constituent généralement les deux variables indépendantes d'un tarif de cubage. Il faudra consulter BÉLANGER, DÉSAULNIERS et DUMONT (1974) pour obtenir des renseignements supplémentaires.

Le Dr Lorenzo Matte, ingénieur forestier, a effectué un travail de pionnier dans le calcul du volume global des tiges régulières (MATTE 1946, 1949, 1967). Il fallait déjà posséder une équation du défilement moyen de l'essence et de là, le coefficient de forme. Les différents niveaux des mesures du diamètre dépendent de la méthode utilisée mais ils représentent généralement les racines du polynôme du défilement. Le volume de la tige consiste à multiplier

Figure 1 IDENTIFICATION DES MESURES SUR UN ARBRE



le volume du cylindre ayant même hauteur et même diamètre que la base de la tige, par son coefficient de forme.

Ainsi, l'application des moindres carrés pour estimer les coefficients d'une régression le moins élaborée, constituait une entreprise quelque peu téméraire à réaliser manuellement. Alors, l'avènement puis le perfectionnement des ordinateurs ont permis un raffinement insoupçonné auparavant dans la rapidité de l'exécution de ces calculs.

## CHAPITRE I

### DÉFILEMENT

#### 1.1 PRINCIPE

La méthode de cubage se base sur l'équation du défilement de la tige et se nomme «Volume de révolution du défilement» (V.R.D.). Comme son nom l'indique, la courbe du défilement pivote autour du centre de l'arbre qui lui sert d'axe pour engendrer un volume de révolution. Une approche semblable a déjà été réalisée par MATTE (1967).

Il s'agit de trouver une équation de régression du rayon  $r$  en fonction du niveau  $h$ , qui représente le défilement et s'exprime par  $r = f(h)$ . Le volume  $V$  entre deux niveaux  $h_I$  et  $h_S$  de la tige se calcule en faisant l'intégrale de la rotation du défilement:

$$V(h_I, h_S) = \pi \int_{h_I}^{h_S} r^2 dh$$

Les unités des rayons et des hauteurs sont respectivement exprimées en millimètres et en centimètres. La hauteur  $h_I$  représente le niveau inférieur de la partie du billon à cuber tandis que  $h_S$  indique celle du niveau supérieur, puis la constante  $\pi = 3,141592653\dots$

## 1.2 CHOIX DE L'ÉQUATION

Quelques modèles d'équations de défilement ont été construits puis testés dans l'étude de DÉSAULNIERS (1972). Ceux-ci devaient répondre à l'hypothèse qu'au niveau de la hauteur totale, le rayon atteignait zéro:  $r = 0$  lorsque  $h = H$

$$\Rightarrow r = (H-h) f(h).$$

### 1.2.1 PREMIER MODÈLE:

Il s'exprime par la formule:

$$r = (H-h) e^{\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2}.$$

Elle possède la forme exponentielle qui peut se transformer en polynôme par le logarithme népérien  $L$  appliqué aux deux membres de l'équation en vue d'estimer les coefficients  $\beta_i$  de régression:

$$L(r \div (H-h)) = \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2.$$

Ce modèle n'a pas été pas retenu malgré son écart résiduel minime; la difficulté réside dans le calcul de l'intégrale définie:



$$\begin{aligned}
V(h_I, h_S) &= \pi \int_{h_I}^{h_S} r^2 \, dh \\
&= \pi \int_{h_I}^{h_S} (H-h)^2 e^{2(\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2)} \, dh.
\end{aligned}$$

### 1.2.2 SECOND MODÈLE:

Il possède la forme polynômiale factorielle:

$$r = (H-h) (\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 + \beta_4 h^3).$$

Ce modèle n'a pas été retenu à cause de son écart résiduel plus grand que les autres modèles testés et de l'obligation d'échantillonner une mesure supplémentaire de chaque tronçon pour estimer le quatrième coefficient ( $\beta_4$ ).

### 1.2.3 DERNIER MODÈLE

Le dernier modèle étudié qui réponde encore à l'hypothèse  $r = (H-h) f(h)$ , prend la forme polynômiale factorielle:

$$r = (H-h) (\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2).$$

Cette équation fut adoptée pour le défilement en raison de sa précision et de sa facilité relative d'intégration. La méthode des moindres carrés s'applique à l'expression transformée pour obtenir les coefficients  $\beta_i$  de la régression:

$$\mu \equiv (r \div (H-h)) = \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2.$$

Ce coefficient  $\mu$  désigne le rapport du défilement en fonction du niveau  $h$ .

### 1.3 ESSAI DU MODÈLE

Nous avons imaginé des valeurs pour simuler des observations dendrométriques effectuées sur une tige. La première colonne du tableau 1 présente les niveaux  $h$  en centimètres et la deuxième, les diamètres correspondants en millimètres; ces deux colonnes forment l'ensemble des données initiales. La colonne suivante contient les diamètres estimés à l'aide des coefficients  $\beta_i$  qui constituent la première ligne de cette sortie; puis, suit la différence entre les diamètres observés et estimés afin d'apprécier à chaque niveau l'ajustement du modèle retenu pour représenter le défilement.

La dernière colonne présente, multiplié par cent, le rapport  $\mu$  du rayon observé sur la différence entre la hauteur totale et le niveau  $h$  sur le tronçon. Ce rapport de défilement sert de base aux calculs des coefficients  $\beta_i$  de la régression par la méthode des moindres carrés. A la fin de la sortie, se trouve l'écart résiduel de la régression qui détermine l'ajustement du modèle avec l'ensemble des données observées.

### 1.4 SOPHISTICATION DU MODÈLE

#### 1.4.1 ADDITION D'UN TERME AU MODÈLE

A la suite d'une étude de défilement effectuée par le S.I.F. pour une multitude d'arbres dont le sapin baumier SAB (Abies balsamea (L.) Mill.) et l'épinette noire EPN (Picea mariana (Mill.) B.S.P.) constituaient les deux essences impliquées, l'ajustement entre les diamètres observés et estimés s'avère très précis pour la majorité des tronçons. Cependant, pour quelques tiges, la bille de pied possède un défilement accentué qui empêche le modèle de s'adapter correctement

Tableau 1

Étude du défilement d'un arbre imaginé  
ayant H = 1850 cm

Coefficients:  $1,835954561E^{-1}$   $-9,402569939E^{-5}$   $2,558467776E^{-8}$

| Niveau (cm) | Diamètre (mm) |            |            | 100×RAPP R/DN |
|-------------|---------------|------------|------------|---------------|
|             | Observation   | Estimation | Différence |               |
| 0           | 720,00        | 679,30     | 40,70      | 19,4595       |
| 100         | 620,00        | 610,57     | 9,43       | 17,7143       |
| 200         | 540,00        | 547,19     | -7,19      | 16,3636       |
| 300         | 460,00        | 488,84     | -28,84     | 14,8387       |
| 400         | 420,00        | 435,23     | -15,23     | 14,4828       |
| 500         | 360,00        | 386,04     | -26,04     | 13,3333       |
| 600         | 340,00        | 340,98     | 0,98       | 13,6000       |
| 700         | 300,00        | 299,72     | 0,28       | 13,0435       |
| 800         | 260,00        | 261,97     | 1,97       | 12,3810       |
| 900         | 240,00        | 227,42     | 12,58      | 12,6316       |
| 1000        | 200,00        | 195,76     | 4,24       | 11,7647       |
| 1100        | 175,00        | 166,69     | 8,31       | 11,6667       |
| 1200        | 140,00        | 139,89     | 0,11       | 10,7692       |
| 1300        | 120,00        | 115,06     | 4,94       | 10,9091       |
| 1400        | 90,00         | 91,89      | -1,89      | 10,0000       |
| 1500        | 75,00         | 70,09      | 4,91       | 10,7143       |
| 1600        | 50,00         | 49,33      | 0,67       | 10,0000       |
| 1700        | 25,00         | 29,31      | -4,31      | 8,3333        |
| 1800        | 10,00         | 9,72       | 0,28       | 10,0000       |

Écart de la régression: 15,5324 mm

entre les niveaux de la souche (0) et de la hauteur de poitrine (H.P.) c'est-à-dire à 115 cm.

Ainsi, le d.h.s. se trouve sous-estimé tandis que souventes fois, les trois ou quatre mesures suivantes comprenant le d.h.p. restent surestimées par compensation. En conséquence, le volume suit cette surévaluation des diamètres au voisinage de la H.P. Cette défaillance de la méthode se produit pour le tronçon ayant le gros bout à un niveau inférieur à 115 cm car pour les niveaux supérieurs, ce renflement issu des racines disparaît graduellement. C'est pourquoi un nouveau terme doit être ajouté au modèle du défilement pour amplifier la courbe entre ces deux niveaux sans en modifier le reste.

Ainsi, l'ancienne formule se présente sous la forme du rapport:

$$\mu \equiv \frac{r}{H-h} = \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2$$

où la variable  $r$  représente le rayon de la tige à un niveau  $h$ , en se rappelant que  $H$  désigne la distance du gros bout du billon jusqu'à la flèche terminale correspondante.

La nouvelle formulation comporte une modification dans le calcul du rapport du défilement  $\mu$  pour les billons contenant le d.h.p. de la tige:

$$\mu \equiv \frac{r}{H-h} = \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 + \beta_4 \text{Max}(0, 1-(h \div 115)^\lambda)$$

où

$$\text{Max}(0, 1-(h \div 115)^\lambda) \equiv 1 - ((\text{Min}(h, 115)) \div 115)^\lambda$$

constitue la correction à effectuer pour l'empatement.

Ainsi,

$$\text{Max}(0, 1-(h \div 115)^\lambda) = \begin{cases} 1-(h \div 115)^\lambda & \text{pour } 0 \leq h < 115 \\ 0 & \text{pour } 115 \leq h \leq H. \end{cases}$$

Alors, le modèle de défilement s'exprime par l'équation:

$$r = (H-h) \left( \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 + \beta_4 \text{Max}(0, 1-(h \div 115)^\lambda) \right)$$

La fonction  $\text{Max}(0, 1-(h \div 115)^\lambda)$  prend la valeur 1 pour  $h = 0$ , diminue à 0 au fur et à mesure que  $h$  croît vers 115 puis reste nulle pour les valeurs de  $h$  supérieures à la H.P. L'exposant  $\lambda$  désigne l'amplitude du défilement de la souche par rapport au défilement moindre du reste de la tige. Lorsque  $\lambda$  devient nul, nous retrouvons intégralement l'ancien modèle présenté au tableau 1 où, cependant, il faut enlever le dernier terme pour estimer les trois coefficients de la régression.

Le quatrième terme du modèle ajoute l'inconnue  $\lambda$  qui sera déterminée à la suite d'un échantillonnage réparti uniformément dans les classes de d.h.p. Il semble probable que chaque essence possède une expression propre pour  $\lambda$ . Il faut mesurer deux diamètres perpendiculaires (mm) pour chacun des niveaux suivants: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 115, 130, 150, 175, 200, 230, 265, 300, 350, 400, 500, 600 etc., ainsi que la hauteur totale en centimètres. Cet échantillonnage établira un meilleur défilement entre la souche et la H.P.

#### 1.4.2 ANALYSE DU DÉFILEMENT POUR DEUX ÉCHANTILLONS

Deux exemples sont retenus parmi une série de 33 études de défilement présentant certaines difficultés d'ajustement selon l'ancien modèle. La fonction EDFL en langage APL (appendice A), présente un ensemble de résultats qui permettent de construire le tableau 1 de l'exemple imaginé, les tableaux 2, 3, 4 et 5 pour l'EPN ainsi que les tableaux 6, 7 et 8 pour le SAB. Les hauteurs totales de ces deux essences atteignent respectivement 2400 et 2120 cm.

Chaque sortie présente d'abord les quatre coefficients de la régression, estimés par la fonction CDF de l'appendice A, que nous pouvons vérifier aux tableaux 1, 2, 3 et 6. Ensuite, apparaît une matrice où chaque ligne correspond à un niveau  $h$  associé à un diamètre observé lors de l'échantillonnage. Les explications qui accompagnent le tableau 1 s'appliquent à ceux-ci.

Le coefficient  $\beta_1$  représente le terme constant de  $\mu = (r \div (H-h))$ . Théoriquement, lorsque le niveau  $h = 0$ , le rapport  $\mu$  devient

$$\mu = \frac{r}{H} = \beta_1 + \beta_4:$$

il existe cependant quelques différences.

Le coefficient  $\beta_1$  constitue, pour le niveau de la souche, le prolongement des rapports de défilement pour les niveaux supérieurs à la H.P. Il faut remarquer les valeurs plus grandes pour les  $\mu$  des niveaux inférieurs à la H.P., ce qui justifie le choix du dernier modèle où apparaît le quatrième terme contenant la fonction Max.

Tableau 2

Étude du défilement de l'EPN pour  $\lambda = 0,5$  et  $H = 2400$  cm  
avec renflement au niveau 1300 cm

Coefficients:

$4,864737377E^{-2}$      $1,759667917E^{-5}$      $4,652892681E^{-9}$      $2,456943275E^{-2}$

| Niveau (cm) | Diamètre (mm) |            |            | 100×RAPP R/DN |
|-------------|---------------|------------|------------|---------------|
|             | Observation   | Estimation | Différence |               |
| 0           | 350,00        | 351,44     | -1,44      | 7,2917        |
| 40          | 284,00        | 280,55     | 3,45       | 6,0169        |
| 115         | 242,00        | 231,85     | 10,15      | 5,2954        |
| 200         | 240,00        | 230,35     | 9,65       | 5,4545        |
| 300         | 230,00        | 228,25     | -1,75      | 5,4762        |
| 400         | 222,00        | 225,72     | -3,72      | 5,5500        |
| 500         | 216,00        | 222,71     | -6,71      | 5,6842        |
| 600         | 210,00        | 219,17     | -9,17      | 5,8333        |
| 700         | 208,00        | 215,03     | -7,03      | 6,1176        |
| 800         | 200,00        | 210,25     | -10,25     | 6,2500        |
| 900         | 200,00        | 204,76     | -4,76      | 6,6667        |
| 1000        | 193,00        | 198,51     | -5,51      | 6,8929        |
| 1100        | 190,00        | 191,45     | -1,45      | 7,3077        |
| 1200        | 184,00        | 183,51     | 0,49       | 7,6667        |
| 1300        | 200,00        | 174,65     | 25,35      | 9,0909        |
| 1400        | 162,00        | 164,80     | -2,80      | 8,1000        |
| 1500        | 157,00        | 153,92     | 3,08       | 8,7222        |
| 1600        | 147,00        | 141,94     | -5,06      | 9,1875        |
| 1700        | 124,00        | 128,81     | -4,81      | 8,8571        |
| 1800        | 118,00        | 114,48     | -3,52      | 9,8333        |
| 1900        | 96,00         | 98,88      | -2,88      | 9,6000        |
| 2000        | 80,00         | 81,96      | -1,96      | 10,0000       |

Écart de la régression: 8,4962 mm

Tableau 3

Étude du défilement de l'EPN pour  $\lambda = 0,5$  et  $H = 2400$  cm  
sans renflement au niveau 1300 cm

\ Coefficients:

4,987361365E<sup>-2</sup>    1,334959488E<sup>-5</sup>    6,470603536E<sup>-5</sup>    2,314788178E<sup>-2</sup>

| Niveau (cm) | Diamètre (mm) |            |            | 100×RAPP R/DN |
|-------------|---------------|------------|------------|---------------|
|             | Observation   | Estimation | Différence |               |
| 0           | 350,00        | 350,50     | -0,50      | 7,2917        |
| 40          | 284,00        | 282,79     | 1,21       | 6,0169        |
| 115         | 242,00        | 235,33     | 6,67       | 5,2954        |
| 200         | 240,00        | 232,33     | 7,67       | 5,4545        |
| 300         | 230,00        | 228,74     | 1,26       | 5,4762        |
| 400         | 222,00        | 224,99     | -2,99      | 5,5500        |
| 500         | 216,00        | 221,03     | -5,03      | 5,6842        |
| 600         | 210,00        | 216,77     | -6,77      | 5,8333        |
| 700         | 208,00        | 212,12     | -4,12      | 6,1176        |
| 800         | 200,00        | 207,02     | -7,02      | 6,2500        |
| 900         | 200,00        | 201,39     | -1,39      | 6,6667        |
| 1000        | 193,00        | 195,14     | -2,14      | 6,8929        |
| 1100        | 190,00        | 188,21     | 1,79       | 7,3077        |
| 1200        | 184,00        | 180,51     | 3,49       | 7,6667        |
| 1300        | 173,00        | 171,96     | 1,04       | 7,8636        |
| 1400        | 162,00        | 162,49     | -0,49      | 8,1000        |
| 1500        | 157,00        | 152,02     | 4,98       | 8,7222        |
| 1600        | 147,00        | 140,48     | 6,52       | 9,1875        |
| 1700        | 124,00        | 127,78     | -3,78      | 8,8571        |
| 1800        | 118,00        | 113,84     | 4,16       | 9,8333        |
| 1900        | 96,00         | 98,60      | -2,60      | 9,6000        |
| 2000        | 80,00         | 81,96      | -1,96      | 10,0000       |

Écart de la régression: 4,6293 mm



Tableau 4

Coefficients de régression pour le défilement  
de l'EPN selon les  $\lambda$

| $\lambda$ | $\beta_1$                  | $\beta_2$                  | $\beta_3$                  | $\beta_4$                  |
|-----------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0,0       | 5,801452717E <sup>-2</sup> | 6,719023600E <sup>-7</sup> | 1,208078029E <sup>-8</sup> | 0                          |
| 0,3       | 4,965916557E <sup>-2</sup> | 1,567632003E <sup>-5</sup> | 5,422974936E <sup>-9</sup> | 2,415762718E <sup>-2</sup> |
| 0,4       | 4,907913941E <sup>-2</sup> | 1,678004887E <sup>-5</sup> | 4,979775418E <sup>-9</sup> | 2,451451822E <sup>-2</sup> |
| 0,5       | 4,864737377E <sup>-2</sup> | 1,759667917E <sup>-5</sup> | 4,652892681E <sup>-9</sup> | 2,456943275E <sup>-2</sup> |
| 0,6       | 4,834184907E <sup>-2</sup> | 1,816975489E <sup>-5</sup> | 4,424500530E <sup>-9</sup> | 2,440553128E <sup>-2</sup> |
| 0,7       | 4,813769128E <sup>-2</sup> | 1,854796939E <sup>-5</sup> | 4,274763682E <sup>-9</sup> | 2,409576633E <sup>-2</sup> |
| 1,0       | 4,791570477E <sup>-2</sup> | 1,893652423E <sup>-5</sup> | 4,125773078E <sup>-9</sup> | 2,279769737E <sup>-2</sup> |
| 1,5       | 4,806034506E <sup>-2</sup> | 1,861540696E <sup>-5</sup> | 4,264245838E <sup>-9</sup> | 2,076479091E <sup>-2</sup> |
| 2,0       | 4,828650745E <sup>-2</sup> | 1,815666135E <sup>-5</sup> | 4,454348514E <sup>-9</sup> | 1,942314218E <sup>-2</sup> |
| 2,5       | 4,845433757E <sup>-2</sup> | 1,782071754E <sup>-5</sup> | 4,592689437E <sup>-9</sup> | 1,861739126E <sup>-2</sup> |

Tableau 5  
Ajustement du défilement de l'EPN selon différents  $\lambda$

| Niveau<br>(cm) | Observés | $\lambda=0$ | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7     | 1,0    | 1,5     | 2,0     | 2,5     |
|----------------|----------|-------------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|---------|---------|---------|
|                |          |             |        |        |        |        | Estimés |        |         |         |         |
| 0              | 350      | 278,47      | 354,32 | 353,25 | 351,44 | 349,19 | 346,72  | 339,42 | 330,36  | 325,01  | 321,94  |
| 40             | 284      | 273,79      | 268,35 | 274,73 | 280,55 | 285,70 | 290,17  | 299,95 | 308,30  | 311,96  | 313,71  |
| 115            | 242      | 265,50      | 235,51 | 233,41 | 231,85 | 230,74 | 230,00  | 229,18 | 229,68  | 230,48  | 231,08  |
| 200            | 240      | 256,80      | 233,25 | 231,59 | 230,35 | 229,47 | 228,88  | 228,22 | 228,60  | 229,22  | 229,69  |
| 300            | 230      | 247,38      | 230,37 | 229,16 | 228,25 | 227,60 | 227,16  | 226,67 | 226,92  | 227,36  | 227,70  |
| 400            | 222      | 238,71      | 227,19 | 226,35 | 225,72 | 225,27 | 224,96  | 224,60 | 224,76  | 225,05  | 225,27  |
| 500            | 216      | 230,66      | 223,64 | 223,11 | 222,71 | 222,42 | 222,23  | 221,98 | 222,05  | 222,22  | 222,35  |
| 600            | 210      | 223,06      | 219,66 | 219,38 | 219,17 | 219,01 | 218,90  | 218,75 | 218,75  | 218,82  | 218,88  |
| 700            | 208      | 215,78      | 215,19 | 215,10 | 215,03 | 214,98 | 214,93  | 214,86 | 214,81  | 214,81  | 214,81  |
| 800            | 200      | 208,67      | 210,15 | 210,21 | 210,25 | 210,27 | 210,28  | 210,26 | 210,18  | 210,12  | 210,08  |
| 900            | 200      | 201,59      | 204,48 | 204,64 | 204,76 | 204,84 | 204,88  | 204,90 | 204,80  | 204,71  | 204,64  |
| 1000           | 193      | 194,39      | 198,12 | 198,35 | 198,51 | 198,62 | 198,69  | 198,74 | 198,63  | 198,51  | 198,43  |
| 1100           | 190      | 186,92      | 191,01 | 191,26 | 191,45 | 191,57 | 191,65  | 191,72 | 191,61  | 191,49  | 191,40  |
| 1200           | 184      | 179,05      | 183,07 | 183,33 | 183,51 | 183,64 | 183,72  | 183,79 | 183,69  | 183,57  | 183,49  |
| 1300           | 200      | 170,63      | 174,25 | 174,48 | 174,65 | 174,77 | 174,84  | 174,91 | 174,83  | 174,72  | 174,64  |
| 1400           | 162      | 161,50      | 164,47 | 164,66 | 164,80 | 164,90 | 164,97  | 165,03 | 164,96  | 164,87  | 164,81  |
| 1500           | 157      | 151,54      | 153,68 | 153,82 | 153,92 | 153,99 | 154,04  | 154,09 | 154,04  | 153,98  | 153,93  |
| 1600           | 147      | 140,59      | 141,80 | 141,88 | 141,94 | 141,98 | 142,01  | 142,04 | 142,02  | 141,98  | 141,96  |
| 1700           | 124      | 128,50      | 128,77 | 128,80 | 128,81 | 128,82 | 128,83  | 128,84 | 128,84  | 128,84  | 128,83  |
| 1800           | 118      | 115,14      | 114,54 | 114,50 | 114,48 | 114,46 | 114,45  | 114,44 | 114,46  | 114,48  | 114,49  |
| 1900           | 96       | 100,35      | 99,02  | 98,94  | 98,88  | 98,84  | 98,81   | 98,79  | 98,82   | 98,86   | 98,89   |
| 2000           | 80       | 84,00       | 82,16  | 82,05  | 81,96  | 81,90  | 81,87   | 81,83  | 81,88   | 81,93   | 81,97   |
| Écart          | 0        | 20,7662     | 9,0946 | 8,6571 | 8,4962 | 8,5591 | 8,7772  | 9,8051 | 11,3510 | 12,2952 | 12,8349 |

Tableau 6

Étude du défilement du SAB pour  $\lambda = 0,5$  et  $H = 2120$  cm

Coefficients:

$1,004416847E^{-1}$      $2,426490011E^{-5}$      $-4,583024447E^{-9}$      $5,765110461E^{-2}$

| Niveau (cm) | Diamètre (mm) |            |            | 100×RAPP R/DN |
|-------------|---------------|------------|------------|---------------|
|             | Observation   | Estimation | Différence |               |
| 0           | 670,00        | 670,31     | -0,31      | 15,8019       |
| 50          | 503,00        | 502,10     | 0,90       | 12,1498       |
| 115         | 436,00        | 413,72     | 22,28      | 10,8728       |
| 200         | 405,00        | 403,63     | 1,37       | 10,5469       |
| 300         | 390,00        | 390,60     | -0,60      | 10,7143       |
| 400         | 362,00        | 376,39     | -14,39     | 10,5233       |
| 500         | 342,00        | 361,03     | -19,03     | 10,5556       |
| 600         | 331,00        | 344,59     | -13,59     | 10,8882       |
| 700         | 330,00        | 327,12     | 2,88       | 11,6197       |
| 800         | 302,00        | 308,67     | -6,67      | 11,4394       |
| 900         | 300,00        | 289,31     | 10,69      | 12,2951       |
| 1000        | 285,00        | 269,08     | 15,92      | 12,7232       |
| 1100        | 252,00        | 248,04     | 3,96       | 12,3529       |
| 1200        | 224,00        | 226,25     | -2,25      | 12,1739       |
| 1300        | 208,00        | 203,75     | 4,25       | 12,6829       |
| 1400        | 184,00        | 180,62     | 3,38       | 12,7778       |
| 1500        | 151,00        | 156,89     | -5,89      | 12,1774       |
| 1600        | 131,00        | 132,63     | -1,63      | 12,5962       |
| 1700        | 105,00        | 107,90     | -2,90      | 12,5000       |
| 1800        | 82,00         | 82,73      | -0,73      | 12,8125       |
| 1820        | 80,00         | 77,65      | 2,35       | 13,3333       |

Écart de la régression: 10,2211 mm

Tableau 7

Coefficients de régression pour le défilement  
du SAB selon les  $\lambda$

| $\lambda$ | $\beta_1$      | $\beta_2$       | $\beta_3$       | $\beta_4$      |
|-----------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| 0,0       | 1,225192704E-1 | -2,204351856E-5 | 1,560796631E-8  | 0              |
| 0,3       | 1,026312422E-1 | 1,984399199E-5  | -2,692087751E-9 | 5,657538634E-2 |
| 0,4       | 1,014088153E-1 | 2,231979065E-5  | -3,752737197E-9 | 5,738167234E-2 |
| 0,5       | 1,004416847E-1 | 2,426490011E-5  | -4,583024447E-9 | 5,765110461E-2 |
| 0,6       | 9,970819492E-2 | 2,572647109E-5  | -5,203876144E-9 | 5,748691875E-2 |
| 0,7       | 9,917800450E-2 | 2,676903560E-5  | -5,643618761E-9 | 5,699239646E-2 |
| 1,0       | 9,847941202E-2 | 2,807053853E-5  | -6,176153066E-9 | 5,438935227E-2 |
| 1,5       | 9,877752253E-2 | 2,728819355E-5  | -5,801549497E-9 | 4,936651748E-2 |
| 2,0       | 9,949723801E-2 | 2,570297825E-5  | -5,094257486E-9 | 4,544424949E-2 |
| 2,5       | 1,001287013E-1 | 2,434047931E-5  | -4,492091892E-9 | 4,276873035E-2 |

Tableau 8  
Ajustement du défilement du SAB selon différents  $\lambda$

| Niveau<br>(cm) | Observés | Diamètres (mm) |         |         |         |         |         |         |         |         |         | Estimés |  |  |  |
|----------------|----------|----------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--|--|--|
|                |          | $\lambda=0$    | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     | 0,7     | 1,0     | 1,5     | 2,0     | 2,5     |         |  |  |  |
| 0              | 670      | 519,48         | 675,04  | 673,27  | 670,31  | 666,51  | 662,16  | 648,16  | 628,13  | 614,55  | 605,89  |         |  |  |  |
| 50             | 503      | 502,83         | 480,76  | 491,73  | 502,10  | 511,67  | 520,32  | 540,72  | 560,31  | 569,76  | 574,52  |         |  |  |  |
| 115            | 436      | 481,96         | 420,56  | 416,74  | 413,72  | 411,42  | 409,75  | 407,52  | 408,37  | 410,57  | 412,50  |         |  |  |  |
| 200            | 405      | 455,94         | 408,93  | 405,98  | 403,63  | 401,84  | 400,54  | 398,77  | 399,37  | 401,03  | 402,50  |         |  |  |  |
| 300            | 390      | 427,01         | 394,37  | 392,27  | 390,60  | 389,33  | 388,39  | 387,09  | 387,45  | 388,57  | 389,58  |         |  |  |  |
| 400            | 362      | 399,73         | 378,88  | 377,49  | 376,39  | 375,53  | 374,90  | 373,99  | 374,15  | 374,83  | 375,46  |         |  |  |  |
| 500            | 342      | 373,89         | 362,49  | 361,68  | 361,03  | 360,52  | 360,13  | 359,54  | 359,55  | 359,88  | 360,21  |         |  |  |  |
| 600            | 331      | 349,33         | 345,25  | 344,89  | 344,59  | 344,34  | 344,15  | 343,82  | 343,71  | 343,78  | 343,87  |         |  |  |  |
| 700            | 330      | 325,85         | 327,18  | 327,15  | 327,12  | 327,07  | 327,03  | 326,89  | 326,70  | 326,58  | 326,50  |         |  |  |  |
| 800            | 302      | 303,27         | 308,31  | 308,52  | 308,67  | 308,77  | 308,83  | 308,84  | 308,60  | 308,35  | 308,16  |         |  |  |  |
| 900            | 300      | 281,39         | 288,68  | 289,03  | 289,31  | 289,50  | 289,63  | 289,73  | 289,48  | 289,15  | 288,89  |         |  |  |  |
| 1000           | 285      | 260,03         | 268,31  | 268,75  | 269,08  | 269,32  | 269,48  | 269,64  | 269,39  | 269,04  | 268,75  |         |  |  |  |
| 1100           | 252      | 239,00         | 247,25  | 247,70  | 248,04  | 248,29  | 248,46  | 248,64  | 248,42  | 248,08  | 247,79  |         |  |  |  |
| 1200           | 224      | 218,12         | 225,52  | 225,93  | 226,25  | 226,48  | 226,64  | 226,82  | 226,63  | 226,33  | 226,08  |         |  |  |  |
| 1300           | 208      | 197,19         | 203,16  | 203,50  | 203,75  | 203,95  | 204,08  | 204,23  | 204,09  | 203,85  | 203,65  |         |  |  |  |
| 1400           | 184      | 176,04         | 180,20  | 180,43  | 180,62  | 180,76  | 180,85  | 180,97  | 180,88  | 180,72  | 180,58  |         |  |  |  |
| 1500           | 151      | 154,47         | 156,66  | 156,79  | 156,89  | 156,97  | 157,03  | 157,09  | 157,05  | 156,97  | 156,90  |         |  |  |  |
| 1600           | 131      | 132,29         | 132,59  | 132,61  | 132,63  | 132,65  | 132,66  | 132,68  | 132,69  | 132,68  | 132,68  |         |  |  |  |
| 1700           | 105      | 109,33         | 108,01  | 107,95  | 107,90  | 107,86  | 107,84  | 107,81  | 107,86  | 107,91  | 107,96  |         |  |  |  |
| 1800           | 82       | 85,38          | 82,96   | 82,83   | 82,73   | 82,66   | 82,61   | 82,56   | 82,62   | 82,72   | 82,81   |         |  |  |  |
| 1820           | 80       | 80,46          | 77,90   | 77,76   | 77,65   | 77,58   | 77,52   | 77,47   | 77,53   | 77,64   | 77,73   |         |  |  |  |
| Écart          | 0        | 42,7699        | 11,5472 | 10,5046 | 10,2211 | 10,6176 | 11,4881 | 15,0868 | 20,2395 | 23,4776 | 25,4432 |         |  |  |  |

De plus, une remarque s'impose sur la relative stabilité des trois premiers coefficients de régression d'une valeur  $\lambda$  à l'autre dans les tableaux 4 et 7.

Le premier critère de choix consiste à conserver la valeur  $\lambda$  correspondant au plus petit écart de la régression tout en considérant le meilleur ajustement pour le d.h.p. et le d.h.s. Ainsi, l'exposant  $\lambda$  appartient généralement à l'intervalle fermé:  $[0,3, 0,7]$  à la suite des tests effectués sur une base individuelle avec des valeurs variant entre 0,3 et 2,5.

Il existe une valeur de  $\lambda$  pour laquelle les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_3$  deviennent minimaux alors que  $\beta_2$  atteint un maximum. Pour chaque exemple des tableaux 4 et 7, cette valeur appartient au voisinage de l'unité.

### 1.5 INVERSION DE LA DÉPENDANCE DES VARIABLES

Le modèle de défilement présente une équation où la variable dépendante  $r$  s'exprime en fonction de la variable indépendante  $h$  sous la forme de  $r = f(h)$  dont le détail prend l'allure:

$$r = (H-h) \left( \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 + \beta_4 \text{Max}(0, 1-(h/115)^\lambda) \right).$$

Parfois, il devient nécessaire de trouver le niveau  $h$  correspondant à un rayon  $r$  fixé à  $r_0$ . Ainsi, la relation entre ces deux variables se trouve inversée  $h = g(r)$  par rapport à l'équation du défilement  $r = f(h)$ .

Nous nous restreignons à étudier les cas où  $2r_0 \leq \text{DHP}$ . Alors, le modèle de défilement se réduit à:

$$20 \quad r = (H-h) (\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2).$$

La démonstration mathématique de la résolution d'une équation du troisième degré en  $h$  se trouve à l'appendice C. Ce développement ardu permet de montrer les difficultés de l'application d'une telle méthode.

Pour le cas où  $2r_0 > \text{DHP}$ , il s'agit d'utiliser la méthode des approximations successives selon Vilenkine (1975). Il faut cependant remarquer que dans ce mémoire, l'estimation du niveau correspondant à un  $r_0$  s'effectue toujours par cette méthode. Ainsi, la fonction NIRF de l'appendice A supporte le processus dont le détail apparaît à la description de cette fonction.





## CHAPITRE II

### VOLUME

Le volume d'un tronçon se calcule par la méthode V.R.D. (volume de révolution du défilement) en utilisant l'équation de défilement dont les références se trouvent dans MATTE (1967) et DÉSAULNIERS (1972b):

$$r = (H-h) \left( \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 + \beta_4 \text{Max}(0, 1-(h/115)^\lambda) \right)$$

L'expression mathématique du volume entre les niveaux  $h_I$  et  $h_S$  s'écrit:

$$V(h_I, h_S) = \pi \int_{h_I}^{h_S} r^2 dh .$$

#### 2.1 FORMULATION

$$\text{Posons } \left\{ \begin{array}{l} F = \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 \\ G = \text{Max}(0, 1-(h/115)^\lambda) . \end{array} \right.$$

Ainsi, l'équation du défilement se réduit à

$$r = (H-h) (F + \beta_4 G)$$

et son carré à

$$\begin{aligned} r^2 &= (H-h)^2 (F + \beta_4 G)^2 \\ &= (H^2 - 2Hh + h^2) (F^2 + 2\beta_4 FG + \beta_4^2 G^2) \\ &= R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} R_1 \equiv F^2 (H-h)^2 \\ R_2 \equiv 2\beta_4 FG (H-h)^2 \\ R_3 \equiv \beta_4^2 G^2 (H-h)^2 \end{cases}$$

où

$$G = \begin{cases} 1 - (h \div 115)^\lambda & \text{pour } 0 \leq h < 115 \\ 0 & \text{pour } 115 \leq h \leq H. \end{cases}$$

Lorsque la bille de pied se trouve exclue du tronçon,  
l'équation se simplifie à

$$r = F (H-h).$$

## 2.2 BASE MATHÉMATIQUE DU CUBAGE

Développons l'expression de  $r^2$  en trois parties.

### 2.2.1 La première partie $R_1$ représente

$$R_1 = (H-h)^2 F^2$$

$$= (H-h)^2 (\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2)^2$$

$$= (H^2 + h^2 - 2Hh) \times$$

$$(\beta_1^2 + \beta_2^2 h^2 + \beta_3^2 h^4 + 2\beta_1\beta_2 h + 2\beta_1\beta_3 h^2 + 2\beta_2\beta_3 h^3)$$

$$= A_1 + A_2 h + A_3 h^2 + A_4 h^3 + A_5 h^4 + A_6 h^5 + A_7 h^6.$$

Ainsi,

$$R_1 = \sum_{i=1}^7 A_i h^{i-1}$$

Chacun des  $A_i$  devient la partie constante d'un terme du polynôme en puissances de  $h$ :

$$A_1 = \beta_1^2 H^2$$

$$A_2 = 2\beta_1 H (\beta_2 H - \beta_1)$$

$$A_3 = (\beta_2 H - \beta_1)^2 + 2\beta_1 H (\beta_3 H - \beta_2)$$

$$A_4 = 2\beta_2 H (\beta_3 H - \beta_2) - 2\beta_1 (2\beta_3 H - \beta_2)$$

$$A_5 = (\beta_3 H - \beta_2)^2 - 2\beta_3 (\beta_2 H - \beta_1)$$

$$A_6 = -2\beta_3 (\beta_3 H - \beta_2)$$

$$A_7 = \beta_3^2.$$

Les  $A_i$  sont calculés par la fonction KPR1 créée en langage APL, dont la copie apparaît à l'appendice A.

Alors, le volume entre deux niveaux, pour la partie  $R_1$ , s'exprime par

$$V_1(h_I, h_S) = \pi \int_{h_I}^{h_S} R_1 dh$$

$$= \pi \int_{h_I}^{h_S} \left( \sum_{i=1}^7 A_i h^{i-1} \right) dh$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \sum_{i=1}^7 A_i \int_{h_I}^{h_S} h^{i-1} dh \\
&= \pi \sum_{i=1}^7 A_i \left[ h^i \div i \right]_{h_I}^{h_S} \\
&= \pi \sum_{i=1}^7 \left( A_i (h_S^i - h_I^i) \div i \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, le volume total du tronçon excluant l'empattement du niveau inférieur de l'arbre se calcule entre son niveau zéro et H:

$$V_1(0, H) = \pi \sum_{i=1}^7 (A_i H^i \div i).$$

Cette expression du volume de la partie  $R_1$ , est calculée par la fonction VRD1 qui se trouve à l'appendice A.

2.2.2 La seconde partie  $R_2$  du développement de  $r^2$  calcule

$$\begin{aligned}
R_2 &= 2\beta_4 FG (H-h)^2 \\
&= 2\beta_4 FG (H^2 - 2Hh + h^2) \\
&= 2\beta_4 G (FH^2 - 2FHH + Fh^2) \\
&= 2\beta_4 G \sum_{j=1}^5 C_j h^{j-1}.
\end{aligned}$$

Comme pour la partie précédente, les  $C_j$  forment les coefficients constants du polynôme en  $h$ .

$$C_1 = \beta_1 H^2$$

$$C_2 = (\beta_2 H - 2\beta_1) H$$

$$C_3 = (\beta_3 H - 2\beta_2) H + \beta_1$$

$$C_4 = - (2\beta_3 H - \beta_2)$$

$$C_5 = \beta_3.$$

Ces coefficients constituent les résultats explicites de la fonction KPR2 de l'appendice A.

Il faut trouver une expression générale pour l'intégrale de la forme:

$$I_n = \int_{h_I}^{h_S} G h^n dh$$

$$\text{où } 0 \leq h_I < h_S \leq 115$$

$$\Rightarrow I_n = \int_{h_I}^{h_S} h^n (1 - (h \div 115)^\lambda) dh$$

$$\text{car } I_n = 0 \quad \text{pour } h_I \geq 115$$

$$I_n = \int_{h_I}^{h_S} (h^n - (h^{n+\lambda} \div 115^\lambda)) dh$$

$$= \left[ \frac{h^{n+1}}{n+1} - \frac{h^{n+1+\lambda}}{115^\lambda (n+1+\lambda)} \right]_{h_I}^{h_S}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[ h^{n+1} \left( 1 - \frac{n+1}{n+1+\lambda} \left( \frac{h}{115} \right)^\lambda \right) \right]_{h_I}^{h_S}$$

En posant la fonction  $S(n, h) = h^{n+1} \left( 1 - \frac{n+1}{n+1+\lambda} \left( \frac{h}{115} \right)^\lambda \right)$ ,

l'intégrale se réduit à

$$I_n = \frac{1}{n+1} (S(n, h_S) - S(n, h_I)),$$

La fonction  $s(n, h)$  est déterminée par le programme IR2 de l'appendice A.

Comme

$$\begin{aligned} R_2 &= 2\beta_4 G \sum_{j=1}^5 C_j h^{j-1} \\ &= 2\beta_4 \sum_{j=1}^5 C_j Gh^{j-1}, \end{aligned}$$

nous avons le volume  $V_2$  entre le niveau inférieur  $h_I$  et le niveau supérieur  $h_S$ :

$$\begin{aligned} V_2(h_I, h_S) &= \pi \int_{h_I}^{h_S} R_2 dh \\ &= 2\beta_4 \pi \int_{h_I}^{h_S} \sum_{j=1}^5 C_j Gh^{j-1} dh \\ &= 2\beta_4 \pi \sum_{j=1}^5 C_j \int_{h_I}^{h_S} Gh^{j-1} dh \\ &= 2\beta_4 \pi \sum_{j=1}^5 C_j I_{j-1} \end{aligned}$$

$$= 2\beta_4\pi \sum_{j=1}^5 \left( c_j (S(j-1, h_S) - S(j-1, h_I)) \right) \div j$$

où

$$S(j-1, h) = h^j \left( 1 - \frac{j}{j+\lambda} \left( \frac{h}{115} \right)^\lambda \right).$$

Le résultat de  $V_2(h_I, h_S)$  représentant le volume de la partie  $R_2$  s'obtient par l'application de la fonction VRD2 de l'appendice A.

|          |                                                  |
|----------|--------------------------------------------------|
| Si $h =$ | alors $S(j-1, h) =$                              |
| 0        | 0                                                |
| 115      | $115^j \left( \frac{\lambda}{j+\lambda} \right)$ |

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_2(0, 115) &= 2\beta_4\pi \sum_{j=1}^5 c_j \times 115^j \left( \frac{\lambda}{j+\lambda} \right) \\ &= 2\lambda\beta_4\pi \sum_{j=1}^5 c_j \times 115^j \div (j+\lambda) . \end{aligned}$$

2.2.3 La dernière partie  $R_3$  du calcul de  $r^2$  se trouve par l'expression:

$$\begin{aligned} R_3 &= \beta_4^2 G^2 (H-h)^2 \\ &= \beta_4^2 G^2 (H^2 - 2Hh + h^2) \\ &= \beta_4^2 G^2 \sum_{k=1}^3 D_k h^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où} \quad D_1 &= H^2 \\
D_2 &= -2H \\
D_3 &= 1.
\end{aligned}$$

Les coefficients  $D_k$  sont évalués par la fonction KPR3 de l'appendice A.

Généralisons une expression pour l'intégrale de la forme:

$$J_n = \int_{h_I}^{h_S} G^2 h^n dh$$

$$\text{où} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq h_I < h_S < 115 \\ G = 1 - (h \div 115)^\lambda \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$$J_n = \int_{h_I}^{h_S} h^n (1 - (h \div 115)^\lambda)^2 dh$$

$$= \int_{h_I}^{h_S} h^n (1 - 2(h \div 115)^\lambda + (h \div 115)^{2\lambda}) dh$$

$$= \int_{h_I}^{h_S} h^n dh - \frac{2}{115^\lambda} \int_{h_I}^{h_S} h^{n+\lambda} dh + \frac{1}{115^{2\lambda}} \int_{h_I}^{h_S} h^{n+2\lambda} dh$$

$$= \left[ \frac{h^{n+1}}{n+1} - \frac{2h^{n+1+\lambda}}{115^\lambda (n+1+\lambda)} + \frac{h^{n+1+2\lambda}}{115^{2\lambda} (n+1+2\lambda)} \right]_{h_I}^{h_S}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[ h^{n+1} \left( 1 - \frac{2(n+1)}{n+1+\lambda} \left( \frac{h}{115} \right)^\lambda + \frac{n+1}{n+1+2\lambda} \left( \frac{h}{115} \right)^{2\lambda} \right) \right]_{h_I}^{h_S}.$$



Identifions la fonction  $T(n, h)$  à l'expression entre crochets de la dernière ligne.

Alors,

$$J_n = \frac{1}{n+1} (T(n, h_S) - T(n, h_I)).$$

La valeur de  $T(n, h)$  est établie par la fonction IR3 dont les explications se retrouvent à l'appendice A.

Nous calculons le volume  $V_3$  entre les niveaux  $h_I$  et  $h_S$ :

$$\begin{aligned} V_3(h_I, h_S) &= \pi \int_{h_I}^{h_S} R_3 \, dh \\ &= \beta_4^2 \pi \int_{h_I}^{h_S} G^2 \sum_{k=1}^3 D_k h^{k-1} \, dh \\ &= \beta_4^2 \pi \sum_{k=1}^3 D_k \int_{h_I}^{h_S} G^2 h^{k-1} \, dh \\ &= \beta_4^2 \pi \sum_{k=1}^3 D_k J_{k-1} \\ &= \beta_4^2 \pi \sum_{k=1}^3 \left( D_k (T(k-1, h_S) - T(k-1, h_I)) \right) \div k. \end{aligned}$$

Les calculs du volume de la partie  $R_3$  sont exécutés par la fonction VRD3 expliquée à l'appendice A.

|        |       |                                                                      |
|--------|-------|----------------------------------------------------------------------|
| Si h = | alors | T(k-1, h) =                                                          |
| 0      |       | 0                                                                    |
| 115    |       | $115^k \left(1 - \frac{2k}{k+\lambda} + \frac{k}{k+2\lambda}\right)$ |

Ainsi,

$$V_3(0, 115) = \beta_4^2 \pi \sum_{k=1}^3 \left( D_k \times 115^k \left(1 - \frac{2k}{k+\lambda} + \frac{k}{k+2\lambda}\right) \right) \div k$$

#### 2.2.4 RÉSUMÉ DE LA MÉTHODE DE CUBAGE V.R.D.

$$V(h_I, h_S) = \pi \int_{h_I}^{h_S} r^2 dh \quad \text{où} \quad r^2 = \sum_{m=1}^3 R_m$$

$$= \pi \int_{h_I}^{h_S} \sum_{m=1}^3 R_m dh$$

$$= \sum_{m=1}^3 \pi \int_{h_I}^{h_S} R_m dh$$

$$V(h_I, h_S) = \sum_{m=1}^3 V_m(h_I, h_S)$$

Cette équation se calcule sur ordinateur par la fonction VRD de l'appendice A.

Il faut remarquer que  $V_1$  calcule le volume sur le tronçon alors que  $V_2 + V_3$  ajoute l'empatement causé par le surplus de défillement de la bille du pied pour les niveaux inférieurs à la H.P. Les tableaux 10 et 11 illustrent ces volumes.

## 2.3 SYSTÈME DE CUBAGE

La caractéristique intrinsèque de la méthode V.R.D. consiste en la possibilité de cuber directement un tronçon selon un ensemble de rayons minimaux RM déterminés par des spécifications en vue de son utilisation optimale. Ce débitage comporte des niveaux et des volumes correspondants dont les unités de mesure pour les rayons, les niveaux et les volumes sont respectivement en millimètres, en centimètres et en centimètres cubes; ce volume est engendré par l'équation du défilement. Les types d'utilisations pour un seul tronçon peuvent comprendre du déroulage, du sciage et de la pâte ou divers autres usages selon les essences: un rayon minimal caractérise chacun de ces types.

Les résultats des tableaux 9, 10 et 11, ainsi que ceux de l'appendice B, présentent le détail et l'accumulation des longueurs et des volumes de plusieurs arbres ou de plusieurs tronçons d'un même arbre: chacun est cubé comme une tige autonome selon sa hauteur totale propre où le gros bout du tronçon devient le niveau 0. Ces calculs constituent une base scientifique précise, essentielle à la construction d'un tarif de cubage, en particulier un tarif d'utilisations.

Le S.I.F. a réalisé des comparaisons du volume total par le système DÉBUTRONC et la méthode de Smalian. Cependant, pour ces deux procédés, quelques diamètres à différents niveaux résultent de l'estimation par l'équation du défilement. Il arrive souvent que le système DÉBUTRONC corrige le biais de la méthode de Smalian par rapport à celle de l'immersion.

### 2.3.1 EXPLICATION DU SYSTÈME DÉBUTRONC

La fonction VRUT de l'appendice A supporte le système du cubage des tronçons pour le débitage selon les utilisations

(DÉBUTRONC). Son emploi est décrit aux tableaux 9, 10 et 11 selon trois sections distinctes: l'en-tête, le dialogue et la sommation.

#### 2.3.1.1 En-tête

L'en-tête au tableau 9 commence par l'écriture de la fonction avec ses arguments selon la syntaxe: RM VRUT NT. La fonction prend le contrôle du système puis en indique l'origine. Lorsque l'opérateur donne une réponse incompatible avec la demande de la console durant le dialogue, le numéro de branchement l'oriente pour corriger une entrée erronée. Ce message permet de sortir de l'exécution ou de retourner à la ligne du système, du tronçon, de la matrice NR ou des 4 niveaux en répondant 0, 1, 2, 3 ou 4. Cette section se termine par le titre qui comprend le nom et la signification du système, puis apparaissent les rayons minimaux d'utilisations spécifiés dans l'argument gauche RM lors de l'application de la fonction VRUT.

#### 2.3.1.2 Dialogue

La deuxième section illustrée au tableau 10 comporte un dialogue entre le système et l'utilisateur afin d'obtenir les spécifications pour chaque tronçon: l'argument droit NT de la fonction indique le nombre de tronçons. Une première ligne indique le rang du tronçon tandis qu'une seconde ligne demande la matrice des niveaux et des rayons correspondants NR; il faut répondre par le nom de la matrice de deux colonnes préalablement définie. La deuxième demande requiert les quatre niveaux: HP, HI, HS et HT afin de calculer les résultats qui suivent; un vecteur numérique de quatre éléments constitue une réponse adéquate en autant que  $0 \leq HP \leq 115$  et  $0 \leq HI < HS \leq HT$ .

Tableau 9

En-tête du système DÉBUTRONC

Syntaxe

(300-50x 1+16) VRUT 2

Origine

Méthode, système et programmation de Gilles Désaulniers : Janvier 1980  
Service de la recherche forestière  
Ministère de l'Énergie et des Ressources du Québec

Directive

Lors du message << no de branchement >> ,

|                  |        |         |         |         |         |
|------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| répondre         | 0      | 1       | 2       | 3       | 4       |
| pour continuer à | sortie | système | tronçon | matrice | niveaux |

Titre

Système D É B U T R O N C

Cubage des tronçons pour le débitage selon les utilisations

par rayons minimaux fixés à : 300,00 250,00 200,00 150,00 100,00 50,00

Dialogue pour chaque tronçon dans le système DÉBUTRONC

Dialogue pour chaque tronçon dans le système DÉBUTRONC

**MATRICE NR**

4 NIVEAUX : HP HI HS HT

115 0 2400 2400

| (MM)<br>RM | LIMITES (CM) |         | LONG    | VOLUMES (CM3) |           |          |            |            |
|------------|--------------|---------|---------|---------------|-----------|----------|------------|------------|
|            | HI           | HS      |         | V1            | V2        | V3       | VT         | VC         |
| 150,00     |              | 22,48   | 22,48   | 10083,747     | 6585,086  | 1099,118 | 17767,951  | 17767,951  |
| 100,00     | 22,48        | 923,14  | 900,67  | 346924,907    | 9120,915  | 723,977  | 356769,798 | 374537,749 |
| 50,00      | 923,14       | 1891,15 | 968,01  | 195718,580    | ,000      | ,000     | 195718,580 | 570256,329 |
| ,00        | 1891,15      | 2400,00 | 508,85  | 14727,268     | ,000      | ,000     | 14727,268  | 584983,597 |
| TOTAL      |              |         | 2400,00 | 567454,501    | 15706,001 | 1823,095 | 584983,597 |            |

Tableau 10 (suite)

Dialogue pour chaque tronçon dans le système DÉBUTRONC

TRONCON 2

MATRICE NR

□: NR29

4 NIVEAUX : HP HI HS HT

□:

115 0 2120 2120

| (MM)<br>RM | LIMITES (CM) |         |         | VOLUMES (CM3) |           |             |
|------------|--------------|---------|---------|---------------|-----------|-------------|
|            | HI           | HS      | LONG    | V1            | V2        | V3          |
| 300.00     | .00          | 9.07    | 9.07    | 12899,537     | 12023,505 | 2820,631    |
| 250.00     | 9.07         | 51.23   | 42.16   | 59199,637     | 33770,191 | 5048,628    |
| 200.00     | 51.23        | 228.82  | 177.59  | 235282,201    | 15366,308 | 932,098     |
| 150.00     | 228.82       | 845.34  | 616.53  | 608707,996    | .000      | .000        |
| 100.00     | 845.34       | 1316.41 | 471.07  | 236950,163    | .000      | .000        |
| 50.00      | 1316.41      | 1731.55 | 415.14  | 76815,258     | .000      | .000        |
| .00        | 1731.55      | 2120.00 | 388.45  | 10288,012     | .000      | .000        |
| TOTAL      |              |         | 2120.00 | 1240142,803   | 61160,004 | 8801,357    |
|            |              |         |         |               |           | 1310104,164 |

Pour chaque tronçon, les longueurs et les volumes se répartissent selon les utilisations établies par les RM. Les niveaux HI et HS représentent la limite inférieure  $h_I$  et la limite supérieure  $h_S$  de l'utilisation, auxquelles s'ajoute la longueur.

Les autres colonnes représentent des volumes:  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  constituent la base de la méthode V.R.D., expliquée au paragraphe 2.2.4 sous forme d'un résumé. Le volume VT se trouve égal à la somme des trois précédents tandis que VC accumule les volumes totaux dans l'éventualité où le tronçon servirait uniquement à ce débitage. La dernière ligne donne le total de chaque colonne. Le système continue le dialogue pour un nouveau tronçon ou passe à la sommation.

Les tronçons 1 et 2 du tableau 10 présentent les résultats des deux arbres dont le défilement est étudié aux tableaux 3 (sans renflement) et 6.

#### 2.3.1.3 Sommation

Au tableau 11, la troisième section présente la sommation des volumes par utilisation pour le nombre de tronçons impliqués dans cette compilation. Cette matrice résulte de l'addition des volumes calculés à la deuxième section pour chaque tronçon. La dernière ligne des résultats comprend la somme des colonnes: suit le message TERMINÉ pour signifier la fin de la session sous la conduite de la fonction VRUT.

Lorsque l'ensemble des tronçons décrit un arbre entier, la colonne du volume cumulé constitue la base de la construction d'un tarif général des utilisations en fonction du d.h.p. et de la hauteur



Tableau 11

Sommation du cubage selon l'utilisation pour tous les tronçons  
par le système DÉBUTRONC

SOMMATION POUR 2 TRONCONS

| (MM)    | VOLUMES (CM3) |           |           |             |             |  |
|---------|---------------|-----------|-----------|-------------|-------------|--|
|         | V1            | V2        | V3        | VT          | VC          |  |
| RM      |               |           |           |             |             |  |
| 300,000 | 12899,537     | 12023,505 | 2820,631  | 27743,673   | 27743,673   |  |
| 250,000 | 59199,637     | 33770,191 | 5048,628  | 98018,456   | 125762,129  |  |
| 200,000 | 235282,201    | 15366,308 | 932,098   | 251580,607  | 377342,736  |  |
| 150,000 | 618791,742    | 6585,086  | 1099,118  | 626475,946  | 1003818,682 |  |
| 100,000 | 583875,069    | 9120,915  | 723,977   | 593719,961  | 1597538,643 |  |
| 50,000  | 272533,838    | ,000      | ,000      | 272533,838  | 1870072,481 |  |
| ,000    | 25015,280     | ,000      | ,000      | 25015,280   | 1895087,761 |  |
| TOTAL   | 1807597,304   | 76866,005 | 10624,452 | 1895087,761 |             |  |

totale. Pour le cas particulier du rayon minimal d'utilisation fixé à zéro, le volume s'avère total ainsi que le tarif de cubage qui en découle. Une sortie complète du cubage d'un BOJ, effectuée par le système DÉBUTRONC, se trouve à l'appendice B.

## CONCLUSION

Cette étude a été réalisée dans l'optique de servir d'assise à la construction d'un tarif d'utilisations pour chaque essence et n'en forme qu'une phase intermédiaire. Une collaboration interdisciplinaire entre trois des Services du M.E.R.: l'inventaire forestier, l'informatique et la recherche forestière, permettra la création de tarifs appropriés pour le Québec. Ceux-ci constituent une base essentielle à l'établissement de la contenance des forêts en vue de leur gestion optimale.

Le caractère mathématique domine cette démarche afin d'asseoir la partie forestière sur un fondement rigoureux. La validité de la méthode V.R.D. réside dans le respect fidèle des principes afin d'éviter les erreurs d'une interprétation trop superficielle. Elle s'applique aussi bien aux mesures des diamètres avec écorce qu'à celles des diamètres sans écorce et chaque tronçon possède ses propres coefficients pour le modèle de son défilement.

Cette recherche trouve sa principale justification dans la nécessité de posséder un outil mathématique et informatique de précision qui puisse s'ajuster au défilement individuel des tronçons, en répartir les volumes et permettre une gamme variée de rayons

d'utilisation selon les spécifications de l'utilisateur. Pour exploiter pleinement les possibilités du système DÉBUTRONC qui permet un raffinement des calculs pour des travaux dendrométriques de recherche, de développement et de production, il faut que la cueillette des données obéisse à des normes décrites dans certains ouvrages énumérés à la bibliographie.

Diverses applications de la méthode ont permis d'étudier, de modifier, d'adapter et de raffiner le modèle du défilement et d'en augmenter l'efficacité pour déboucher sur le système DÉBUTRONC; ce dernier cube chaque tronçon en effectuant la répartition du volume selon le débitage déterminé par le chercheur et spécifié dans les rayons minimaux. Un ensemble de programmes supporte ce système et permet un dialogue pour l'entrée des données initiales nécessaires aux multiples calculs de longueurs et de volumes.

A la suite des analyses et des résultats présentés aux différents tableaux, il semble que l'objectif de se doter d'un instrument précis pour cuber les tronçons a été pleinement atteint. Il reste cependant quelques éléments du défilement à figurer pour des applications particulières: c'est pourquoi la recherche continue.

## BIBLIOGRAPHIE

- ANONYME, 1977. Vérification des travaux d'inventaire forestier. Serv. de l'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 94 p.
- BÉLANGER, J., G. DÉSAULNIERS et J.-M. DUMONT, 1974. Tarifs de cubage d'utilisation. Cueillette des données. Serv. de l'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 26 p.
- BÉLANGER, J. et J.-M. DUMONT, 1974. Tarifs de cubage d'utilisation. Variation de l'épaisseur de l'écorce. Serv. de l'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 30 p.
- BOUCHON, J., 1974. Les tarifs de cubage. Ec. nat. du Génie rural, des Eaux et des Forêts, Nancy, 57 p.
- CENTRE DE TRAITEMENT DE L'INFORMATION, 1977. Guide de l'utilisateur. 2<sup>e</sup> éd., C.T.I., univ. Laval, Québec, 211 p.
- COCHRAN, W.G., 1967. Sampling techniques. 2<sup>e</sup> éd., John Wiley & Sons, New York, 413 p.
- DAGNELIE, P., 1973. Théorie et méthodes statistiques - applications agronomiques. Vol. I: La statistique descriptive et les fondement de l'inférence statistique. 2<sup>e</sup> éd., les Presses agron. de Gembloux, Bruxelles, 378 p.
- DAGNELIE, P., 1975. Théorie et méthodes statistiques - applications agronomiques. Vol. II: Les méthodes de l'inférence statistique. 2<sup>e</sup> éd., les Presses agron. de Gembloux, Bruxelles, 462 p.
- DÉSAULNIERS, G., 1971. Construction d'un tarif général de cubage (CTC). Rapp. interne du Serv. de l'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 47 p.
- DÉSAULNIERS, G., 1972a. Étude de quelques modèles d'équations pour simuler des tables dynamiques de rendement forestier. Thèse de maîtrise présentée à la fac. de For. et Géod. de l'univ. Laval, Québec, 286 p.

- DÉSAULNIERS, G., 1972b. Étude préliminaire pour la construction d'un tarif de cubage général au Québec (CTC2). Rapp. interne du Serv. de l'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 187 p.
- FOURGEAUD, C. et A. FUCHS, 1967. Statistique. Coll. univ. de math., Dunod, Paris, 325 p.
- FRÈRE MARIE-VICTORIN, é.c., 1964. Flore laurentienne. Les Presses de l'univ. de Montréal, Montréal, 926 p.
- GILMAN, L. et A.J. ROSE, 1974. APL, an interactive approach. 2<sup>e</sup> éd., John Wiley & Sons, Toronto, 383 p.
- GROUPE D'ING. FOR. DU S.I.F., 1975. Cahier: Normes d'inventaire forestier. Serv. d'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 625 p.
- HOEL, P.G., S.C. PORT et C.J. STONE, 1971. Introduction to probability theory. Houghton Mifflin Co., Boston, 258 p.
- JOHNSTON, J., 1963. Econometric methods. McGraw-Hill Book Co., New York, 300 p.
- LAVRENTIEV, M. et B. CHABAT, 1977. Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. 2<sup>e</sup> éd., traduite par H. Damadian. Edition MIR, Moscou, 828 p.
- LEGRAS, J., 1971. Méthodes et techniques de l'analyse numérique. Dunod, Paris, 321 p.
- MATTE, L., 1946. The taper of coniferous species with special reference to loblolly pine. Thèse de doctorat présentée à l'École des gradués d'Arts et Sciences de l'univ. Duke, Durham, U.S.A., 38 p.
- MATTE, L., 1949. The taper of coniferous species with special reference to loblolly pine (résumé de la thèse). The Forestry Chronicle, Vol. 25, n° 1, 12 p.
- MATTE, L., 1967. Du volume des arbres. Rapp. int. n° 2, Serv. de la rech., Min. des Terres et Forêts, Québec, 16 p.
- NETER, J. et W. WASSERMAN, 1974. Applied linear statistical models - regression, analysis of variance and experimental designs. Richard D. Irwin, Inc., Homewood, U.S.A., 842 p.
- NOËL, C. et R. ROULEAU, 1979. Parcelle-échantillon permanente - normes techniques 1979. Serv. de l'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 12 p.

- PERRON, J.-Y., 1978. Tarifs de cubage d'arbres entiers (résultats). Serv. de l'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 38 p.
- POLIVKA, R.P. et S. PAKIN, 1975. APL: the language and its usage. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, U.S.A., 579 p.
- RICHARD, Y., 1971. Échantillonnage aléatoire stratifié avec distribution conditionnelle des observations. Mémoire n° 3, Serv. de la rech., Min. des Terres et Forêts, Québec, 13 p.
- SELBY, S.M., 1971. Standard mathematical tables. 19<sup>e</sup> éd., the Chemical Rubber Co., Cleveland, U.S.A., 710 p.
- SNEDECOR, G.W. et W.G. COCHRAN, 1972. Méthodes statistiques. 6<sup>e</sup> éd. traduite par H. Boelle et E. Camhaji. Assoc. de Coord. Tech. Agricole, Paris, 649 p.
- TOMLINSON, J., 1972. Établissement d'une équation de défilement du sapin et son application immédiate dans l'optimisation du tronçonnage des grumes. Thèse de maîtrise en sciences appliquées au département d'Ingénierie Industrielle de l'université de Toronto, 65 p.
- TREMBLAY, P.-H., 1966. Tarifs de cubage généraux. (Ed. provisoire). Serv. de l'inv. for., Min. des Terres et Forêts, Québec, 44 p.
- TUCKER, H.G., 1967. An introduction to probability and mathematical statistics. Academic Press Inc., New York, 228 p.
- VILENKINE, N., 1975. Méthodes des approximations successives dans quelques applications des mathématiques. Ed. traduite du russe par D. Embarek. Édition MIR, Moscou, 126 p.
- VYGODSKI, M., 1975. Aide-mémoire de mathématiques supérieures. Ed. MIR, Moscou, U.R.S.S., 861 p.





## LEXIQUE

Les notations que nous trouvons ici comprennent les abréviations, les fonctions, les symboles et les variables accompagnés de leur signification.

### ABRÉVIATIONS

|            |                                                                            |
|------------|----------------------------------------------------------------------------|
| <u>APL</u> | : langage de programmation                                                 |
| BOJ        | : bouleau jaune ( <u>Betula alleghaniensis</u> Britt.)                     |
| C.T.I.     | : Centre de traitement de l'information de l'université Laval              |
| DÉBUTRONC  | : système de cubage en vue du débitage des tronçons selon les utilisations |
| d.h.p.     | : diamètre à hauteur de poitrine                                           |
| d.h.s.     | : diamètre à hauteur de souche                                             |
| EPN        | : épinette noire ( <u>Picea mariana</u> (Mill.) B.S.P.)                    |
| H.P.       | : hauteur de poitrine fixée à 130 cm du sol                                |
| M.E.R.     | : ministère de l'Énergie et des Ressources                                 |
| M.T.F.     | : ministère des Terres et Forêts                                           |
| SAB        | : sapin baumier ( <u>Abies balsamea</u> (L.) Mill.)                        |
| SI         | : Système international d'unités                                           |
| S.I.F.     | : Service de l'inventaire forestier                                        |
| V.R.D.     | : méthode du volume de révolution du défilement                            |

## FONCTIONS

|      |                                                       |
|------|-------------------------------------------------------|
| Arg  | : fonction hyperbolique inverse                       |
| ch   | : cosinus hyperbolique                                |
| cos  | : cosinus                                             |
| f    | : relation fonctionnelle directe entre deux variables |
| g    | : relation fonctionnelle inverse de f                 |
| Max  | : fonction du maximum de plusieurs valeurs            |
| Min  | : fonction du minimum parmi plusieurs valeurs         |
| S, T | : fonction de n et de h                               |
| sh   | : sinus hyperbolique                                  |
| sin  | : sinus                                               |

## SYMBOLES

|               |                                                                                                                                |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| { }           | : accolades désignant un ensemble                                                                                              |
| €             | : appartenance                                                                                                                 |
| $\pi$         | : constante qui prend la valeur de 3,141592653...<br>c'est-à-dire le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle |
| dx            | : différentielle de la variable x                                                                                              |
| =             | : égalité                                                                                                                      |
| $\triangleq$  | : égalité par définition                                                                                                       |
| $\mathbb{R}$  | : ensemble des nombres réels                                                                                                   |
| $\approx$     | : équivalence                                                                                                                  |
| $\equiv$      | : identité                                                                                                                     |
| $\Rightarrow$ | : implication                                                                                                                  |
| $\infty$      | : infini                                                                                                                       |
| $\int$        | : intégrale                                                                                                                    |

|               |                                                               |
|---------------|---------------------------------------------------------------|
| $[a, b]$      | : intervalle fermé dont a et b constituent les limites        |
| L             | : logarithme népérien                                         |
| $[x]_a^b$     | : mesure de x entre les limites a et b                        |
| i             | : nombre imaginaire défini par $i^2 = -1$                     |
| e             | : nombre népérien qui prend la valeur de 2,718281828459045... |
| $\neq$        | : non-égalité (différent)                                     |
| $\sqrt[n]{a}$ | : racine n <sup>e</sup> de a                                  |
| $\Sigma$      | : sommation                                                   |
| >             | : symbole désignant «plus grand que»                          |
| $\leq$        | : symbole désignant «plus petit ou égal à»                    |
| <             | : symbole désignant «plus petit que»                          |
| cm            | : centimètre                                                  |
| mm            | : millimètre                                                  |

#### VARIABLES

|                     |                                                                                                                   |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A                   | : coefficients du polynôme en puissance de h pour la partie R <sub>1</sub>                                        |
| a, b                | : paramètres du polynôme en x du troisième degré                                                                  |
| $\beta$ , B         | : coefficients de régression du défilement                                                                        |
| C                   | : les coefficients du polynôme en h pour la partie R <sub>2</sub>                                                 |
| D                   | : coefficients du polynôme en h pour la partie R <sub>3</sub>                                                     |
| DFB                 | : diamètre au fin bout du tronçon                                                                                 |
| DGB                 | : diamètre au gros bout du tronçon                                                                                |
| F, G                | : subdivision en deux parties de l'équation du défilement                                                         |
| h                   | : niveaux de la tige à cuber                                                                                      |
| H, HT               | : hauteur totale pour le tronçon qui mesure l'intervalle entre le gros bout et la flèche terminale correspondante |
| H <sub>I</sub> , HI | : niveau inférieur du cubage pour le tronçon                                                                      |

|              |                                                                                      |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $H_S, HS$    | : niveau supérieur de la partie du tronçon à cuber                                   |
| $I_n, J_n$   | : intégrale des fonctions en h                                                       |
| $\lambda, E$ | : amplitude du défilement de la souche                                               |
| $\mu$        | : rapport du défilement                                                              |
| $p, q, s$    | : paramètres du polynôme en h du troisième degré                                     |
| $Q$          | : distance entre le gros bout du tronçon et le d.h.s. sans toutefois dépasser 115 cm |
| $r$          | : rayon de la tige à différents niveaux                                              |
| $r_o, R0$    | : rayon fixé                                                                         |
| $R_m$        | : $m^e$ partie parmi les trois de $r^2$                                              |
| $RM$         | : rayons minimaux d'utilisation                                                      |
| $V$          | : volumes servant de base à la méthode V.R.D.                                        |

APPENDICE A

PRÉSENTATION DES FONCTIONS APL



L'ensemble des fonctions qui apparaissent dans cet appendice constitue la programmation créée en langage APL selon la version disponible au C.T.I. de l'université Laval. Les pages suivantes contiennent d'abord une synthèse de l'ensemble des fonctions au tableau 12, puis la description et la copie de chacune des fonctions impliquées dans le système de débitage DÉBUTRONC selon des utilisations choisies.

L'alimentation en données s'effectue par un dialogue entre la console et l'utilisateur. Ce dernier répond selon les caractéristiques qu'il aura spécifiées aux arguments lors de l'exécution de la fonction VRUT. La liste suivante comprend les fonctions spécifiques créées par l'auteur pour monter ce système: CDF CUBA EDFL IR2 IR3 KPR1 KPR2 KPR3 NIRF RDN VRD VRD1 VRD2 VRD3 VRED VRUT, ainsi que des fonctions d'utilité générale: ADDI AJR MLTK RMPL RSTR SOUL ST ZR  $\Delta$ FNV  $\Delta$ ZR qui servent à diverses autres fonctions depuis des périodes variées.

Plusieurs fonctions nécessitent certaines variables globales prédéfinies parmi B, E et HT propres au système, comme on peut le constater au tableau 12. La variable B représente le vecteur numérique des coefficients de régression pour l'équation du défilement, l'exposant E désigne l'amplitude  $\lambda$  du défilement de la souche tandis que la variable HT indique la hauteur totale.

De plus, suivant cette recherche, il existe une autre version différente du système DÉBUTRONC créée en langage FORTRAN IV par le Service de l'informatique en collaboration avec le S.I.F. et le S.R.F. du M.E.R. du Québec. Pour obtenir de l'information supplémentaire, il suffira d'adresser vos demandes à l'auteur.

Tableau 12

Synthèse des fonctions APL

| Nom  | - - -  | Syntaxe | - - - | Fonctions requises                          | Variables<br>prédéfinies |
|------|--------|---------|-------|---------------------------------------------|--------------------------|
| ADDI | R ← M  | ADDI    | V     | RSTR; ZR; ΔZR                               |                          |
| AJR  | Z ← I  | AJR     | J     | RSTR; ZR                                    |                          |
| CDF  | Z ←    | CDF     | M     | ADDI; MLTK; ZR                              | E; HT                    |
| CUBA | V ← P  | CUBA    | M     | AJR; CDF; NIRF; RDN; VRD;<br>ZR; ΔZR        |                          |
| EDFL |        | EDFL    | M     | AJR; RSTR; ST; ΔFNV; ΔZR                    | E; HT                    |
| IR2  | S ← N  | IR2     | H     |                                             | E                        |
| IR3  | T ← N  | IR3     | H     |                                             | E                        |
| KPR1 | A ← B  | KPR1    | HT    | ZR                                          |                          |
| KPR2 | C ← B  | KPR2    | HT    | ZR                                          |                          |
| KPR3 | D ←    | KPR3    | HT    |                                             |                          |
| MLTK | R ← M  | MLTK    | V     |                                             |                          |
| NIRF | Z ←    | NIRF    | RO    | RDN; ZR                                     | HT                       |
| RDN  | Z ←    | RDN     | NH    | RSTR                                        | B; E; HT                 |
| RMPL | Z ← E  | RMPL    | V     |                                             |                          |
| RSTR | Z ← I  | RSTR    | J     |                                             |                          |
| SOUL | Z ←    | SOUL    | V     |                                             |                          |
| ST   | Z ←    | ST      | I     |                                             |                          |
| VRD  | V ← HI | VRD     | HS    | AJR; VRD1; VRD2; VRD3;<br>ZR; ΔZR           | HT                       |
| VRD1 | V ← HI | VRD1    | HS    | KPR1                                        | B; HT                    |
| VRD2 | V ← HI | VRD2    | HS    | IR2; KPR2                                   | B; HT                    |
| VRD3 | V ← HI | VRD3    | HS    | IR3; KPR3                                   | B; HT                    |
| VRED | P      | VRED    | M     | AJR; CDF; EDFL; VRD;<br>ZR; ΔFNV; ΔZR       | HT                       |
| VRUT | RM     | VRUT    | NT    | AJR; CUBA; RSTR; SOUL;<br>ST; ZR; ΔFNV; ΔZR |                          |
| ZR   | Z ← I  | ZR      | J     |                                             |                          |
| ΔFNV | Z ← F  | ΔFNV    | M     | RMPL; ZR                                    |                          |
| ΔZR  | Z ← I  | ΔZR     | J     |                                             |                          |



### ADDI

La fonction dyadique ADDI présente un résultat explicite sous forme d'une matrice R qui constitue la somme d'un vecteur numérique V avec chacune des colonnes de la matrice M. Il faut évidemment que les dimensions des deux arguments restent compatibles. Elle nécessite les fonctions auxiliaires RSTR, ZR et ΔZR.

### AJR

La fonction dyadique AJR permet d'ajouter J par la marge, les lignes et les colonnes selon les spécifications du vecteur numérique I. Le résultat Z devient une matrice dont les éléments sont du même type que ceux de J. Elle requiert les fonctions auxiliaires RSTR et ZR.

### CDF

La fonction monadique CDF estime les coefficients de défilement reliant les niveaux h aux rayons r; l'argument M constitue une matrice de deux colonnes contenant les niveaux et les rayons. Le nombre de coefficients atteint 4 ou 3 selon la présence ou non de mesures issues des niveaux inférieurs à la découpe du d.h.p. Elle nécessite les fonctions auxiliaires ADDI, MLTK et ZR ainsi que les variables globales E et HT.

Si une longueur importante du tronçon ne contient pas d'observations, des valeurs proportionnelles seront ajoutées entre les deux mesures de ce segment pour diminuer la possibilité d'un renflement

```

V R←M ADDI V;J;Z
[1] A ADDIT. MATRICE M AVEC VECTEUR V : 79-11-20
[2] A FNS : RSTR ZR ΔZR
[3] A (1=PPM)/M←1 RSTR M'
[4] →0x1J ΔZR(J←JF11≠PV←V ZR R←((J←PM)E11,0)PO)/'DIMENS. INCOMP. (ADDI)'
[5] →(400<P,M)/LB ZR J←10
[6] →0 ZR R←M+Q(PPM)PV
[7] LB:→LBx1(PM)E21>Z←0 ZR R←R,(0,(~1↑J))ΔZ ZR M←0 1ΔM ZR J←J,✓,0≠Z←1 RSTR V+ME;11
[8] R←J/N
V
V Z←I AJR J
[1] A FNS : RSTR ZR
[2] Z←((I131)+Zx1+I131)P(I131PO),1)\(Z←1↑(PJ),11=P,J)RSTR J ZR I←3↑I
[3] Z←((I11PO), (PZ)E21P1)\((I121)+(1↑PZ)x1+I121)P(I121PO),1)ΔZ
V
V Z←CDF M;U;D;I;N
[1] A COEFF. DU DEFIL. Z AVEC M: H R
[2] A FNS: ADDI MLTK ZR ; VARS: E HT
[3] →Z←0x10EU ZR M←(U←,^(M≠0),ME;11<HT)/M←ME+ME;11;J
[4] →LAX1(500-200x3≡(PM)E11)>F/,0 1ΔD←(1 0ΔZ,E11HT,0)-Z←M
[5] D←D MLTK÷N ZR M←((+/,U←(N≠,≡1F/N←1FLO,1x(OFDE;11)+100xx3,5-(PM)E11)*0,5),0),2)P1←1
[6] LB:→LBx12≡I←I+1 ZR ME;11←(,UE;1N-11)/,(+UE;1N,1+1(N←(PU)E21)-2JMLTK DE;11)ADDI Z;11
[7] LA:Z←,(ME;21)÷HT-ME;11)B(1 1 1,(3<1↑PM)x(E>0)x✓/U≠0)/(ME;11)*-1+13),U←1-(ME;11E115)
÷115)*E ZR Z←D←U←0
V
V U←P CUBA M;B;HT;L;Q;U;Z
[1] A CUBAGE D'UN TRONCON ENTRE * RAYONS MIN. D'UTILISATION
[2] A P: HP HI HS HT RM(S) ; M: H R
[3] A FNS: AJR CDF NIRF RDN VRD ZR ΔZR
[4] →0x1Q ΔZR(Q←✓/(P121>P131),(P131>P141),(P111>115),P<0)/5 1 AJR'PARAM. ERR. (CUBA)'ZR
U←1 6p0

```

artificiel de l'équation; toutefois, si la limite apicale de ce segment coïncide avec la hauteur totale, le dernier rapport  $\mu$  se trouve répété à quelques niveaux dans l'intervalle selon un algorithme de calcul. C'est pourquoi il ne faut pas trop extrapoler une régression au delà des données recueillies au risque d'y introduire une erreur.

L'algorithme consiste à vérifier si un espace entre deux mesures consécutives dépasse 500 cm dans le cas général ou 300 cm pour un tronçon de moins de quatre mesures. Dans l'affirmative, il s'agit de soustraire ou d'ajouter 100 selon le cas, d'en extraire la racine carrée puis de diviser ce résultat par 10; le maximum entre l'unité et l'entier inférieur de la réponse précédente donne un entier duquel l'unité est soustraite: cette différence indique le nombre d'approximations à ajouter dans cet intervalle.

#### CUBA

La fonction dyadique CUBA effectue le cubage d'un tronçon entre différents rayons minimaux RM d'utilisations. L'argument gauche P constitue un vecteur numérique qui contient quatre hauteurs HP, HI, HS et HT, puis les rayons minimaux. L'autre argument M représente la matrice de deux colonnes: niveaux et rayons.

Le résultat explicite V forme une matrice possédant six colonnes et autant de lignes qu'il existe de rayons minimaux. La première colonne de V donne les rayons minimaux, les deux suivantes, les niveaux inférieurs et supérieurs, tandis que les trois dernières présentent les volumes: V1, V2 et V3.

Cette fonction CUBA requiert les fonctions auxiliaires AJR, CDF, NIRF, RDN, VRD, ZR et  $\Delta ZR$ .

```

[5] B←CDF M←M+(P M)PQ, OXHT←P L4JZR P L4J←P L4J+Q←115-P L1J
[6] →O X10=P, L←(L X10 L)/L←L L L←(L←RDN Q)/L←4 P, O ZR U←2 P L2J
[7] L A:→(O=P, L←Z P L), Z←P L2J→U L2J←P L3J L N I R F L L1J)/L B, L A
[8] V←V, L1J L1J, U, U L1J V R D U L2J
[9] →L A X1(O←P, L←1 L L)←P L3J→U L1J←U L2J
[10] L B:V←(1=U, (←1+U←(P V) L1J) P1) V V
V
EDFL M X Y B
[1] A ETUDE DU MODELE DE DEFILEMENT AVEC M: H R
[2] A FNS: AJR RSTR ST ΔFNU ΔZR; VARS: E HT
[3] 40 1 1 AJR ETUDE DU DEFILEMENT.
[4] 3 1 AJR EXPOSANT: ', 9 2 ΔFNU E, ST 1 ΔZR 3 AJR HAUTEUR: ', 10 O V HT
[5] 3 1 AJR MATRICE: ', M
M←M
[7] B←(M L2J)÷Y←HT-M L1J)EX←((3 P1), (3<1 P M)X(E>0)X V/X*0)/(M L1J*←1+13), X←O L1-(M L1J)÷11
5)*E, ST 1
[8] 3 1 AJR COEFFICIENTS: ', 'E18, 10' ΔFNU B
[9] 8 AJR NIVEAU', (15 AJR DIAMETRE'), 15 AJR 100xRAPP R/DN', ST 1
[10] 15 AJR (1 RSTR OBSERVATION ESTIMATION DIFFERENCE'), '...'
[11] M←(M, -(M←M, Y X X+, XB) L2 3J), 100xM L2J)÷Y
[12] (12 O, (6 P12 2), 14 4) ΔFNU M←(1 RSTR M L1J), (2xM L1+13J), M L5J
[13] →O X1 X ΔZR(X←O=Y←(P M) L1J-P, B)/3 2 AJR ECART IMPOSSIBLE.
[14] 3 2 AJR ECART DE LA REGRESSION: ', 10 4 ΔFNU((+/M L4J*2)÷Y)*0.5
V
S←N IR2 H
[1] A INTEGRALE DE LA PARTIE R2
[2] A VARS: E
[3] S←(1-(N+1)÷N+1+E)X(H÷115)*E)X H*N+1
V

```

## EDFL

La fonction monadique et implicite EDFL présente divers calculs pour l'étude du modèle de défilement dont l'argument M représente le nom de la matrice des données initiales où la première des deux colonnes indique les niveaux des rayons de la seconde. Elle nécessite les fonctions auxiliaires: AJR, RSTR, ST, ΔFNV et ΔZR et les variables globales: E et HT. Si la bille de pied n'appartient pas au tronçon, il faut que E soit nul ou que tous les niveaux deviennent supérieurs à 115.

Les premiers résultats comprennent la hauteur totale, l'exposant de l'amplitude pour le défilement de la partie proximale du tronçon, le nom de la matrice impliquée puis les coefficients de la régression sans extrapolation, comme avec CDF. Une matrice de cinq colonnes suit en présentant les niveaux, les diamètres observés et estimés puis leur différence qui servira au calcul de l'écart de la régression, ainsi que cent fois le rapport  $\mu$ , soit le rayon observé divisé par la différence entre la hauteur totale et le niveau.

## IR2

La fonction dyadique et explicite IR2 calcule l'expression  $S(n, h) = h^{n+1} \left( 1 - \frac{n+1}{n+1+\lambda} \left( \frac{h}{115} \right)^\lambda \right)$  qui sert à évaluer l'intégrale de la partie  $R_2$ . Elle requiert la variable globale E qui remplace le  $\lambda$  de l'expression précédente.

### IR3

La fonction dyadique et explicite IR3 exécute les calculs de l'expression  $T(n, h)$  qui est utilisée pour établir l'intégrale

$$J_n = \int_{h_I}^{h_S} G^2 h^n dh \quad \text{où} \quad G = 1 - (h \div 115)^\lambda .$$

Cette fonction ne requiert que la variable globale E.

### KPR1

La fonction dyadique et explicite KPR1 calcule les coefficients  $A_i$  du polynôme en  $h$  pour la partie  $R_1$ . L'argument gauche B contient les coefficients de régression du défilement tandis que HT indique la hauteur totale de la tige dont le gros bout du tronçon sert de base. Le résultat A forme un vecteur de sept nombres. Une seule fonction auxiliaire est requise durant l'exécution: ZR.

### KPR2

KPR2 est une fonction dyadique et explicite qui calcule les coefficients  $C_j$  du polynôme en  $h$  pour la seconde partie  $R_2$  du développement de  $r^2$ . Le résultat C constitue un vecteur de cinq nombres exprimés en fonction des coefficients de régression B et de la hauteur totale HT. Seule la fonction ZR est nécessaire à son fonctionnement.

```

▽ T←N IR3 H
[1]  a INTEGRALE DE LA PARTIE R3 ; 82-09-20
[2]  a VARS: E
[3]  T←(1+(-(2×(N+1)÷N+1+E)×(H÷115)*E)+(N+1)÷N+1+2×E)×(H÷115)*2×E)×H*N+1
▽

▽ A←B KPR1 HT
[1]  a COEFF. DU POLYNOME POUR R1 ; 82-09-20
[2]  a FNS: ZR
[3]  A[12]←((B[1]×HT)*2),2×B[1]×HT×(B[2]×HT)-B[1]ZR A←7ρ0
[4]  A[3]←((B[2]×HT)-B[1])×2)+2×B[1]×HT×(B[3]×HT)-B[2]
[5]  A[4]←(2×B[2]×HT×(B[3]×HT)-B[2])×2)-2×B[1]×(2×B[3]×HT)-B[2]
[6]  A[5]←((B[3]×HT)-B[2])×2)-2×B[3]×(B[2]×HT)-B[1]
[7]  A[5+12]←(-2×B[3]×(B[3]×HT)-B[2]),B[3]*2
▽

▽ C←B KPR2 HT
[1]  a COEFF. DU POLYNOME POUR R2 ;82-09-20
[2]  a FNS: ZR
[3]  C[13]←((B[13]×HT*2)-2×0,B[12]×HT)+0 0,B[1]ZR C←5ρ0
[4]  C[4]←(-(2×HT×C[5]←B[3])←B[2]
▽

▽ D←KPR3 HT
[1]  a COEFF. DU POLYNOME POUR R3 ; 82-09-20
[2]  D←(HT*2),(-2×HT),1
▽

▽ R←M MLTK V;J
[1]  a MULTIPLIE MATRICE M PAR VECTEUR V : 81-09-13
[2]  →(1≠ρM)/L1
[3]  M←((ρ,M),1)ρM
[4]  L1:R←((J←1↑ρM),0)ρ0

```

### KPR3

La fonction KPR3 est monadique et explicite et présente le résultat D comme les trois coefficients  $D_k$  du polynôme en h pour la partie  $R_3$  du développement de  $r^2$ . Ces coefficients sont uniquement reliés à la hauteur totale HT qui sert d'argument.

### MLTK

La fonction dyadique et explicite MLTK multiplie chaque colonne d'une matrice M par un vecteur numérique V où il faut que les dimensions s'avèrent compatibles.

### NIRF

La fonction monadique et explicite NIRF estime un niveau Z pour un rayon fixé  $R0^*$  par la méthode itérative de la subdivision d'une longueur en cent intervalles égaux. L'intervalle inférieur auquel appartient la valeur  $R0$  est retenu, un intervalle adjacent est ajouté de chaque côté pour former une nouvelle longueur de trois intervalles, qui sera à son tour divisée par cent pour ainsi recommencer le processus d'itération. Celui-ci s'arrête lorsque le nombre atteint six ou que l'écart entre  $R0$  et la valeur estimée devient égal ou inférieur au millionnième. Elle requiert pour son exécution les fonctions auxiliaires: RDN et ZR ainsi que la variable: HT.

---

\* Voir lexique, p. 50



```

[5]      →(J=ρV←,V)/L2
[6]      →-ρ[←'DIM INCOMP'
[7]      L2:→(500<x/ρM)/LB
[8]      R←M×Φ(φρM)ρV
[9]      →0
[10]     LB:R←R,V×M[;1]
[11]     →(x×/ρM←0 1←M)/LB
▽
▽ Z←NIRF R0;II;IL;IN;U;Y
[1]     a NIVEAU Z PAR ITERATIONS POUR UN RAYON FIXE R0 ; 89-03-31
[2]     aFNS: RDN ZR ; VARS: HT
[3]     IL←HT,IN←0
[4]     →0×\R0≥,RDN Z←0
[5]     LA:Y←Y[U←1↑U\]/U←|R0-Y←,RDN Z←IL[2]+(II←0.01×-/IL)×-11+101]
[6]     →LA×\ (5≥IN←IN+1)^(1E-6)≤|R0-Y ZR IL←0[(Z←Z[U])+1-1×II)[HT]
▽
▽ Z←RDN NH
[1]     a RAYONS DU DEFIL. SELON LES NIV. NH ; 82-09-21
[2]     aFNS: RSTR ; VARS: B E HT
[3]     Z←((ρNH←((NH≥0)^(NH≤HT)/NH←,NH),0)ρ0
[4]     Z+1 RSTR(HT-NH)×,((NH←.-11+13[ρB),(4=ρB)/1 RSTR 0[1-(NH÷115)*E)+.×B
▽
▽ R←V RMPL A;T
[1]     a REMPLACER DANS A LES EL. IMP. DE V PAR LES PAIRS ; 83-06-13
[2]     →(0≠2|ρ,V)/R←-999
[3]     →((V[;1],V[;1])V.≠1↑ρV←(0 2[0.5 0×ρV)ρV)/0
[4]     T←(REV[;1])/ρR←,A
[5]     A←ρA
[6]     R[T]←V[V[;1],R[T];2]
[7]     R←ApR
▽

```

### RDN

La fonction monadique et explicite RDN estime les rayons Z du défilement selon les niveaux spécifiés à l'argument NH. Elle requiert la fonction RSTR ainsi que les variables globales: B, E et HT. Cette fonction s'ajuste au nombre de coefficients contenus dans le vecteur B.

### RMPL

La fonction dyadique et explicite RMPL remplace les éléments de la première des deux colonnes de E par ceux de la deuxième dans l'argument V. Le résultat Z possède la même dimension que V et si une erreur se rencontre au cours de l'exécution, il ne retient que la valeur -999.

### RSTR

RSTR constitue une fonction dyadique et explicite qui restructure l'argument J en une matrice dont le nombre de colonnes se trouve déterminé par la somme des nombres positifs de l'argument gauche I; cependant, les nombres négatifs servent à enlever le nombre correspondant de colonnes.

```

V Z+I RSTR J+R
[1] A RESTRUCTURER J SELON I 179-12-11
[2] →OX1((Z+999)EJ)∧1=R+PJ+J
[3] →LAX1~∧/O=I+(O=111)/I+I,O
[4] →P,Z+(R,O)PJ
[5] LA:→LBX1O≠R
[6] →P,Z+(O,+/(O<I)/I)PJ
[7] LB:→OX1∧/1,I>OXp,Z+((FR÷Z),Z)P(J+1)/(R+ZXO*(Z+/(I+(O≠I)/I)IR)↑J
[8] Z+(-1≠J+(J≠O)/J+JXQ(PQJ+(11)°,≠1F/O,11)PX1)/Z
V
V Z+SOUL V
[1] A SOULIGNER LES SYMBOLES DE V
[2] Z+(2,(PZ))PZ+,V
[3] ZL2:( ' ' #ZL2: ] / \ (PZ) [L2] ] + ' '
V
V Z+ST I
[1] A SAUTER DES LIGNES
[2] →OX1(I≠O)VO≠111,Z+OP1+1↑I
[3] (I-1)PDAV[157]
V
V V+HI VRD HS;W
[1] A CALCUL DU VOL, DE REVOL, DU DEFIL, D'UN TRONCON
[2] A FNS: AJR VRD1 VRD2 VRD3 ZR AZR ; VARS: HT
[3] →OX1W AZR(W+V/(HI≠HS),(HS>HT),HI<O)/5 1 AJR'PARAM, ERR, (VRD) 'ZR V+3PO
[4] →OX1115≠HI ZR VC1J+HI VRD1 HS
[5] VC2 3J+(HI VRD2 W),HI VRD3 W+115LHS
V

```

### SOUL

La fonction monadique et explicite SOUL souligne les caractères du vecteur V, excepté les «blancs». Le résultat Z constitue une matrice de deux lignes dont la première contient V tandis que l'autre comprend les soulignés.

### ST

La fonction monadique et explicite ST permet de sauter le nombre de lignes déterminé par le premier élément de l'argument I.

### VRD

La fonction dyadique et explicite VRD calcule le volume de révolution de l'équation du défilement pour un tronçon entre le niveau inférieur HI et le niveau supérieur HS.

Elle utilise les fonctions: AJR, VRD1, VRD2, VRD3, ZR, AZR et la hauteur totale HT. Le résultat V forme un vecteur de trois éléments représentant les volumes pour chacune des parties:  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  du développement de  $r^2$ .

### VRD1

La fonction dyadique et explicite VRD1 cube le volume de révolution de l'équation de défilement de la partie  $R_1$  du développement de  $r^2$ . Elle ne nécessite que la fonction KPR1 et les variables B et HT. Le résultat V donne le volume entre les niveaux HI et HS.

### VRD2

La fonction dyadique et explicite VRD2 donne le volume V entre les niveaux HI et HS pour  $R_2$  de la partition du calcul de  $r^2$ . Les deux fonctions IR2 et KPR2, de même que les deux variables globales B et HT, sont requises pour l'exécution de cette fonction principale.

### VRD3

La fonction VRD3, qui calcule le volume de révolution V de la partie  $R_3$  du développement de  $r^2$ , s'avère être dyadique et explicite et requiert les fonctions IR3 et KPR3 ainsi que les variables B et HT. Ce volume est compris entre les niveaux HI et HS.

### VRED

La fonction dyadique et implicite VRED s'applique entre le vecteur P des paramètres HP, HI et HS et la matrice M des données observées pour les niveaux h et les rayons r. Elle présente le détail des calculs concernant la méthode V.R.D. pour un tronçon. Le message des paramètres erronés s'imprime lorsque le vecteur est défini avec des valeurs inadéquates. Elle écrit tous les résultats fournis par la fonction EDFL, puis ajoute les coefficients, les niveaux de P et le volume correspondant pour chacune des trois parties de  $r^2$  calculé par la fonction VRD.

Elle nécessite plusieurs fonctions auxiliaires: AJR, CDF, EDFL, VRD, ZR,  $\Delta FNV$ ,  $\Delta ZR$  et la variable HT.

```

V+HI VRD1 HS:I
[1] A VOL. DE REVOL. DU DEFIL. DE R1
[2] A FNS: KPR1 ; VARS: B HT
[3] →V+OX\HI=HS
[4] V+O.01xO/(B KPR1 HT)x((HS*I)-HI*I)÷I+17
V
V+HI VRD2 HS:J
[1] A VOL. DE REVOL. DU DEFIL. DE R2
[2] A FNS: IR2 KPR2 ; VARS: B HT
[3] →V+OX\Iv/(3≧PB),HI=HS
[4] V+O.02xOBL4]x+/(B KPR2 HT)x((J-1)IR2 HS)-(J-1)IR2 HI)÷J+15
V
V+HI VRD3 HS:K
[1] A VOL. DE REVOL. DU DEFIL. DE R3
[2] A FNS: IR3 KPR3 ; VARS: B HT
[3] →V+OX\Iv/(3≧PB),HI=HS
[4] V+O.01xO(BL4]*2)x+/(KPR3 HT)x((K-1)IR3 HS)-(K-1)IR3 HI)÷K+13
V
P VRED M:B;NR:Q
[1] 10 1 AJR'DETAIL DU VOLUME DE REVOLUTION DU DEFILEMENT POUR UN TRONCON'
[2] A P: HP HI HS; M: H R
[3] A FNS: AJR CDF EDFL VRD ZR AFNU AZR ; VARS: HT
[4] →OX\Q AZR(Q+V/(PL11>115),(PL21≧PL31),(PL31>HT),P<O)/5 1 AJR'PARAM. ERR. (VRED)
[5] EDFL'NR'ZR NR+M+M+(PM)PQ,O ZR HT+HT+Q ZR P+P+Q+115-PL11GO
[6] 3 2 AJR'COEFFICIENTS : ',,E18.10'AFNU B+CDF M
[7] 3 1 AJR'VOL1^2^3 : ',,15 3 AFNU PL2JVRD PL3J^ZR 3 1 AJR'NIVEAUX: ',,10 2 AFNU PL2 3]
V

```

### VRUT

La fonction dyadique et implicite VRUT présente une série de résultats à la suite d'un dialogue avec l'opérateur afin d'obtenir les données nécessaires aux calculs. Cette fonction maîtresse de toute cette programmation constitue un système de cubage des tronçons qui répartit le volume selon les rayons minimaux d'utilisations spécifiés à l'argument RM. L'argument droit NT indique le nombre de tronçons impliqués dans ce cubage. Elle nécessite les fonctions auxiliaires AJR, CUBA, RSTR, SOUL, ST, ZR,  $\Delta$ FNV et  $\Delta$ ZR. Il faut examiner des sorties exécutées par cette fonction pour mieux en comprendre les possibilités: tableaux 9, 10, 11 et 14 (à l'appendice B).

### ZR

La fonction ZR, dyadique et explicite, ne sert qu'à ajouter des instructions sur une ligne où le résultat Z reste identique à l'argument gauche I.

### $\Delta$ FNV

La fonction dyadique et explicite  $\Delta$ FNV permet de remplacer, à l'intérieur des formats ( $\square$ FMT et  $\square$ F), les points par des virgules. Elle prend comme argument gauche le détail du format désiré et comme argument droit, la matrice numérique à transformer. Les deux seules fonctions auxiliaires requises sont RMPL et ZR.

```

V RM VRUT NT;G;H;M;N;S;U
[1]  a REPART. DU VOL. PAR RAYONS MIN. (RM) D'UTILISATION POUR UN NB DE TRONCONS (NT)
[2]  a MATRICE NR: H R ; H EN CM ET R EN MM
[3]  a FNS: AJR CUBA RSTR SOUL ST ZR AFNV AZR
[4]  5 AJR METHODE, SYSTEME ET PROGRAMMATION DE GILLES DESAULNIERS : JANVIER 1980', ST 3
[5]  5 AJR SERVICE DE LA RECHERCHE FORESTIERE.
[6]  5 AJR MINISTERE DE L'ENERGIE ET DES RESSOURCES DU QUEBEC.
[7]  10 AJR 'REFONDRER', 8 AJR, 12 0 1+15 AZR 5 1 AJR 'LORS DU MESSAGE << NO DE BRANCHEMENT,
    >>', ST 3
[8]  10 1 AJR 'POUR CONTINUER A', 4 AJR, 4 AJR 5 8P 'SORTIE SYSTEME TRONCON MATRICE NIVEAUX
    '
[9]  ->LOXIU AZR(U<0=9NT+((0=1INT)^0<NT)/NT)/, 5 1 AJR 'NT EN ERR.'
[10] L1:(1 0+10 1 AJR 'SYSTEME'), 10 0 1 AJR SOUL'DEUTRONC'ZR S+1 4PN<0, ST 5
[11] UC2:(13),(11+15),(28+13), 47+121+... 'ZR U<(N1 RSTR'CUBAGE DES TRONCONS POUR LE DEBITAG
    E SELON LES UTILISATIONS'), C11.
[12] 5 1 AJR 'PAR RAYONS MINIMAUX FIXES A : ', 8 2 AFNV RM AZR 5 AJR U
[13] LA:-(NT<N+1)/LC+6x0=+/, SC;21
[14] L2:5 1 AJR 'TRONCON', 5 0VN, ST 7
[15] L3:5 1 AJR 'MATRICE NR.
[16] ->LBXIU AZR 15 AJR(U<2*9PM<D)/'NR NON-MATRICE'
[17] L4:5 1 AJR '4 NIVEAUX : HP HI HS HT.
[18] ->LBXIU AZR 15 AJR(U<4U)/(-2>U)+, 5 0VU<PH<(0=H)/H), ' NIVEAUX'ZR H<D
[19] G<(H,RM)CUBA M+MC+0 "14M;1
[20] (, 7 AJR '(MM)'), (, 7 AJR(4P'...'), ' LIMITES (CM) ', 4P'...'), 10 AJR(19P'...'), ' VOLUMES (CM3
    ) ', 20P'...', ST 2
[21] (, 8 AJR 3 2P 'RMHHS'), ' LONG', 14, 11 AJR 5 2P 'U1V2V3VTV'
[22] 2 AJR((8P10 2), 10P13 3)AFNV GC;131, (-/GC;3 21), (GC;3+131U), +\, U<+/GC;3+13, ST 11
[23] 7 1 AJR 'TOTAL', 20 AJR, (10 2, 8P13 3)AFNV((-14GC;31)-GC;1+21), (+/GC;3+131), +/GC;3+131
[24] S<((U<(U=10U)/U<U<U+GC;11, SC;111)GC;111)NS
[25] ->LA ZR SCU;1+131+SCU<(SC;111+U)\GC;111+1+131+GC;3+131
[26] LC:5 2 AJR 'SOMMATION POUR', (, 3 0VNT), (-2>NT)+, ' TRONCONS', ST 10
[27] 7 AJR '(MM)', 10 AJR(19P'...'), ' VOLUMES (CM3) ', 20P'...
[28] 13 3 AFNV(S,U), +\, U<+/SC;1+13, ST 11 AZR 34, 11 AJR 6 2P 'RMU1V2V3VTV'
[29] ->LO AZR 7 1 AJR 'TOTAL', 13 3 AFNV(+/SC;1+131), +/SC;1+131
[30] LB:15 1 AJR 'NO DE BRANCHEMENT'
[31] 2 ->L', 1 0V14U, P, U<((0=115)^5>U)^0=U)/U<"14, D
[32] LO:10 AJR U, ' TERMINE ', U<17P'...'/...', ST 10

```

V



### $\Delta ZR$

La fonction dyadique et explicite  $\Delta ZR$  écrit l'argument droit J et spécifie l'argument I dans le résultat Z. Elle permet comme ZR, d'ajouter des instructions sur une ligne.

▽ Z←I ZR J  
 [1] Z←I  
 ▽

▽ Z←F ΔFNU M  
 [1] AFNS ↑ RMPL ZR  
 [2] →LAXIOε~1↑2↑1↑F  
 [3] →LB ZR M←F DFMT M  
 [4] LA:M←F M  
 [5] LB:Z←'↑↑'RMPL M  
 ▽

▽ Z←I ΔZR J  
 [1] →LAXIO=ρ,J  
 [2] J  
 [3] LA:Z←I  
 ▽

APPENDICE B

EXEMPLE DE SORTIE AVEC LE SYSTÈME

DÉBUTRONC



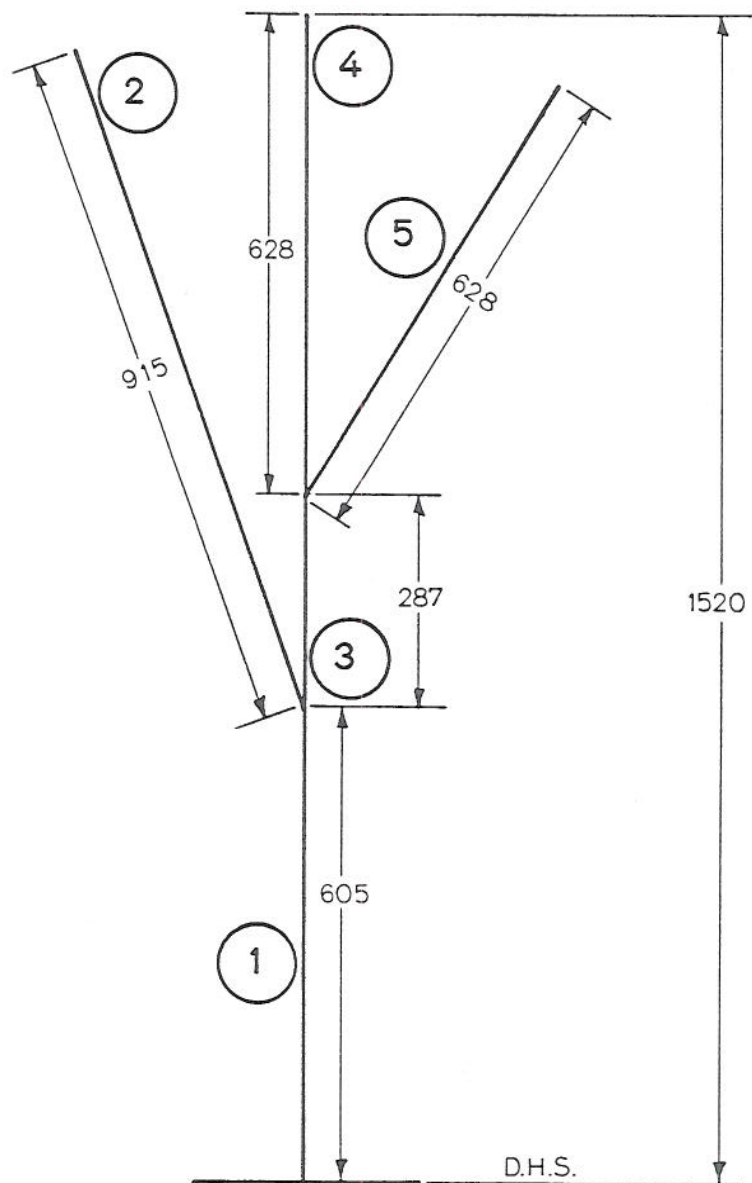
L'appendice B illustre la sortie complète de l'application du système DÉBUTRONC aux cinq tronçons d'un bouleau jaune BOJ (Betula alleghaniensis Britt.) dont les données, présentées au tableau 13, ont été fournies par le S.I.F.

Le schéma de l'arbre se trouve à la figure 2 où apparaissent les numéros et les longueurs des tronçons. Les rayons minimaux RM d'utilisations sont fixés tous les 40 mm selon le vecteur numérique à l'argument gauche, lors de la commande de VRUT écrite au tout début du tableau 14. Le détail des résultats du système est expliqué au paragraphe 2.3.1. Les quelques remarques qui suivent concernent le tableau 14.

La bille entière de pied, contenant le d.h.p., appartient au tronçon 1; la découpe à HP se trouve à 115 cm du gros bout qui coïncide avec la souche. Il faut cuber du niveau  $HI = 0$  jusqu'à celui de  $HS = 605$  cm où la hauteur totale de la tige, dont le tronçon constitue la partie proximale, prend la valeur  $HT = 1520$  cm. Si le gros bout du tronçon se distingue du niveau de la souche, le paramètre HP devient la différence entre la découpe du d.h.p. et le niveau Q: la figure 1 illustre ces diverses mesures.

Puisque le gros bout du tronçon 2 se situe au-dessus de la découpe du d.h.p., la valeur de HP devient 0. Cependant, la longueur  $Q = 115 - HP = 115$  sera ajoutée à chacun des niveaux pour les concilier avec le modèle général du défilement sans toutefois rien modifier aux longueurs ni aux volumes. Si le gros bout se trouve sous la découpe du d.h.p., la valeur  $Q = 115 - HP$  sera alors additionnée aux niveaux.

Figure 2 SCHÉMA DES TRONÇONS D'UN BOJ



○ = Numéro du tronçon

↕ = Longueur du tronçon (cm)

Ce tronçon est cubé jusqu'à la flèche terminale HS = HT; cependant, les mesures avaient été prises pour les diamètres plus grands que 80 mm. Ainsi, le reste a été estimé par extrapolation.

Tableau 13

Matrices NR des cinq tronçons d'un BOJ

| Tronçon   | 1   |       | 2  |      | 3   |       | 4   |      | 5   |      |
|-----------|-----|-------|----|------|-----|-------|-----|------|-----|------|
| Matrice   | M1  |       | M2 |      | M3  |       | M4  |      | M5  |      |
| Variables | N   | R     | N  | R    | N   | R     | N   | R    | N   | R    |
|           | 0   | 228,5 | 10 | 99,0 | 10  | 118,5 | 10  | 91,5 | 10  | 57,5 |
|           | 115 | 200,0 | 35 | 96,5 | 100 | 125,5 | 92  | 79,0 | 64  | 53,5 |
|           | 206 | 186,0 | 70 | 93,0 | 170 | 124,0 | 140 | 71,5 | 146 | 47,5 |
|           | 332 | 186,5 |    |      | 254 | 108,5 | 238 | 45,0 | 208 | 42,5 |
|           | 467 | 171,5 |    |      |     |       |     |      |     |      |
|           | 562 | 146,0 |    |      |     |       |     |      |     |      |

Tableau 14  
Système DEBUTRONC appliqué aux cinq tronçons d'un BOJ

METHODE, SYSTEME ET PROGRAMMATION DE GILLES DESAULNIERS : JANVIER 1980  
SERVICE DE LA RECHERCHE FORESTIERE  
MINISTERE DE L'ENERGIE ET DES RESSOURCES DU QUEBEC

LORS DU MESSAGE << NO DE BRANCHEMENT >>.

| REPONDRE         | 0      | 1       | 2       | 3       | 4       |
|------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| POUR CONTINUER A | SORTIE | SYSTEME | TRONCON | MATRICE | NIVEAUX |

SYSTEME DEBUTRONC  
CUBAGE DES TRONCONS POUR LE DEBITAGE SELON LES UTILISATIONS

PAR RAYONS MINIMAUX FIXES A : 240,00 200,00 160,00 120,00 80,00 40,00

TRONCON 1

MATRICE NR

□:

M1

4 NIVEAUX : HP HI HS HT

□:

115 0 605 1520

| (MM)<br>RM | HI     | LIMITES (CM)<br>HS | LONG   | V1         | V2        | VOLUMES (CM3)<br>V3 | VT         | VC         |
|------------|--------|--------------------|--------|------------|-----------|---------------------|------------|------------|
| 200,00     | ,00    | 103,83             | 103,83 | 131113,988 | 12621,269 | 421,340             | 144156,597 | 144156,597 |
| 160,00     | 103,83 | 507,95             | 404,12 | 424650,966 | 85,886    | ,179                | 424737,031 | 568893,629 |
| 120,00     | 507,95 | 605,00             | 97,05  | 71486,295  | ,000      | ,000                | 71486,295  | 640379,923 |
| TOTAL      |        |                    | 605,00 | 627251,249 | 12707,156 | 421,519             | 640379,923 |            |

TRONCON 2

MATRICE NR

□:

M2

4 NIVEAUX : HP HI HS HT

□:

0 0 915 915

| (MM)<br>RM | HI     | LIMITES (CM)<br>HS | LONG   | V1        | V2   | VOLUMES (CM3)<br>V3 | VT        | VC        |
|------------|--------|--------------------|--------|-----------|------|---------------------|-----------|-----------|
| 80,00      | 115,00 | 302,68             | 187,68 | 48130,789 | ,000 | ,000                | 48130,789 | 48130,789 |
| 40,00      | 302,68 | 666,77             | 364,09 | 42771,040 | ,000 | ,000                | 42771,040 | 90901,829 |
| ,00        | 666,77 | 1030,00            | 363,23 | 6072,324  | ,000 | ,000                | 6072,324  | 96974,153 |
| TOTAL      |        |                    | 915,00 | 96974,153 | ,000 | ,000                | 96974,153 |           |



TRONCON 3

MATRICE NR

□:

M3

4 NIVEAUX : HP HI HS HT

□:

0 0 287 915

| (MM)<br>RM | HI     | LIMITES (CM)<br>HS | LONG   | V1         | V2   | VOLUMES (CM3)<br>V3 | VT         | VC         |
|------------|--------|--------------------|--------|------------|------|---------------------|------------|------------|
| 80,00      | 115,00 | 402,00             | 287,00 | 128364,018 | ,000 | ,000                | 128364,018 | 128364,018 |
| TOTAL      |        |                    | 287,00 | 128364,018 | ,000 | ,000                | 128364,018 |            |

TRONCON 4

MATRICE NR

□:

M4

4 NIVEAUX : HP HI HS HT

□:

0 0 628 628

| (MM)<br>RM | HI     | LIMITES (CM)<br>HS | LONG   | V1        | V2   | VOLUMES (CM3)<br>V3 | VT        | VC        |
|------------|--------|--------------------|--------|-----------|------|---------------------|-----------|-----------|
| 80,00      | 115,00 | 208,91             | 93,91  | 22323,594 | ,000 | ,000                | 22323,594 | 22323,594 |
| 40,00      | 208,91 | 371,94             | 163,03 | 19869,489 | ,000 | ,000                | 19869,489 | 42193,083 |
| ,00        | 371,94 | 743,00             | 371,06 | 2870,613  | ,000 | ,000                | 2870,613  | 45063,696 |
| TOTAL      |        |                    | 628,00 | 45063,696 | ,000 | ,000                | 45063,696 |           |

TRONCON 5

MATRICE NR

□:

M5

4 NIVEAUX : HP HI HS HT

□:

0 0 628 628

| (MM)<br>RM | HI     | LIMITES (CM)<br>HS | LONG   | V1        | V2   | VOLUMES (CM3)<br>V3 | VT        | VC        |
|------------|--------|--------------------|--------|-----------|------|---------------------|-----------|-----------|
| 40,00      | 115,00 | 353,61             | 238,61 | 18457,642 | ,000 | ,000                | 18457,642 | 18457,642 |
| ,00        | 353,61 | 743,00             | 389,39 | 7217,556  | ,000 | ,000                | 7217,556  | 25675,198 |
| TOTAL      |        |                    | 628,00 | 25675,198 | ,000 | ,000                | 25675,198 |           |

SOMMATION POUR 5 TRONCONS

| (MM)    | VOLUMES (CM3) |           |         |            |            |  |
|---------|---------------|-----------|---------|------------|------------|--|
| RM      | V1            | V2        | V3      | VT         | VC         |  |
| 200,000 | 131113,988    | 12621,269 | 421,340 | 144156,597 | 144156,597 |  |
| 160,000 | 424650,966    | 85,886    | ,179    | 424737,031 | 568893,629 |  |
| 120,000 | 71486,295     | ,000      | ,000    | 71486,295  | 640379,923 |  |
| 80,000  | 198818,400    | ,000      | ,000    | 198818,400 | 839198,324 |  |
| 40,000  | 81098,171     | ,000      | ,000    | 81098,171  | 920296,495 |  |
| ,000    | 16160,493     | ,000      | ,000    | 16160,493  | 936456,988 |  |
| TOTAL   | 923328,313    | 12707,156 | 421,519 | 936456,988 |            |  |

\_/^-/\_/^-/\_/^-/\_/^-\_ TERMINE \_/\_/^-/\_/^-/\_/^-\_



## APPENDICE C

### RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ



Le modèle de défilement présente une équation où la variable dépendante  $r$  s'exprime en fonction de la variable indépendante  $h$  sous la forme de  $r = f(h)$  dont le détail prend l'allure:

$$r = (H-h) \left( \beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2 + \beta_4 \text{Max}(0, 1-(h/115)^\lambda) \right).$$

Parfois, il devient nécessaire de trouver le niveau  $h$  correspondant à un rayon  $r$  fixé à  $r_0$ . Ainsi, la relation entre ces deux variables se trouve inversée  $h = g(r)$  par rapport à l'équation du défilement  $r = f(h)$ .

Nous nous restreignons à étudier les cas où  $2r_0 \leq DHP$ . Alors, le modèle de défilement se réduit à une équation du troisième degré en  $h$ :

$$r = (H-h) (\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2).$$

### C.1 TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS

$$r_0 = (H-h) (\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2)$$

$$\Rightarrow 0 = (H-h) (\beta_1 + \beta_2 h + \beta_3 h^2) - r_0$$

$$\Rightarrow 0 = h^3 + \frac{\beta_2 - \beta_3 H}{\beta_3} h^2 + \frac{\beta_1 - \beta_2 H}{\beta_3} h + \frac{r_0 - \beta_1 H}{\beta_3}.$$

Cette dernière équation s'exprime sous forme générale, comme un polynôme en  $h$ :

$$h^3 + ph^2 + qh + s = 0$$

où

$$p = \frac{\beta_2 - \beta_3 H}{\beta_3}$$

$$\left| \begin{array}{l} q = \frac{\beta_1 - \beta_2 H}{\beta_3} \\ s = \frac{r_0 - \beta_1 H}{\beta_3} \end{array} \right.$$

Posons  $h = x - \frac{p}{3}$  ,

l'équation se transforme en

$$x^3 + \frac{1}{3} (3q - p^2)x + \frac{1}{27} (2p^3 - 9pq + 27s) = 0$$

qui prend une nouvelle forme générale où le terme du second degré disparaît:

$$x^3 + ax + b = 0$$

où

$$a = \frac{1}{3} (3q - p^2)$$

$$b = \frac{1}{27} (2p^3 - 9pq + 27s)$$

avec  $ab \neq 0$ .

## C.2 APPLICATIONS DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Il faut employer le sinus hyperbolique pour trouver les racines de l'équation qui correspond à l'identité fondamentale présentée à la page 204 de SELBY (1971).

$$4 \operatorname{sh}^3 u + 3 \operatorname{sh} u - \operatorname{sh} 3u \equiv 0, \text{ pour } u \in \mathbb{R}$$

Ainsi  $-\infty < u < \infty$

$$\Rightarrow -\infty < \operatorname{sh} u < \infty$$

$$\text{car sh } u \triangleq \frac{e^u - e^{-u}}{2} .$$

De plus, nous aurons besoin de

$$\text{ch } u \triangleq \frac{e^u + e^{-u}}{2} .$$

Posons  $x = m \text{ sh } u$

$$\Rightarrow x^3 + ax + b = m^3 \text{ sh}^3 u + am \text{ sh } u + b = 0 .$$

$$\Rightarrow \frac{4}{m^3} = \frac{3}{am} = \frac{-\text{sh } 3u}{b}$$

$$\text{puisque } 4 \text{ sh}^3 u + 3 \text{ sh } u - \text{sh } 3u \equiv 0 .$$

Isolons  $m$ :

$$\frac{4}{m^3} = \frac{3}{am} \Rightarrow 4a = 3m^2$$

$$\Rightarrow m = 2\sqrt{\frac{a}{3}} .$$

Au tour de  $u$ :

$$\frac{-3b}{am} = \text{sh } 3u$$

$$\Rightarrow \text{sh } 3u = \frac{-3b}{2a} \sqrt{\frac{3}{a}} = \frac{-b}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^3} = \frac{-b}{2} \left(\frac{3}{a}\right)^{1,5}$$

$$\Rightarrow 3u = \text{Arg sh} \left( \frac{-b}{2} \left(\frac{3}{a}\right)^{1,5} \right) + 2\pi i$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{3} (2\pi i + \text{Arg sh} \left( \frac{-b}{2} \left(\frac{3}{a}\right)^{1,5} \right))$$

$$\text{où } i^2 \triangleq -1 .$$

La fonction hyperbolique inverse Arg du sinus s'exprime en fonction du logarithme népérien L dont la définition se trouve à la page 597 de VYGODSKI (1975):

$$\text{Arg sh } v = L (v + \sqrt{v^2 + 1})$$

$$\Rightarrow u = \left( L \underbrace{\sqrt[3]{\frac{-b}{2} \left(\frac{3}{a}\right)^{1,5} + \frac{1}{2a} \left(\frac{27b^2 + 4a^3}{a}\right)^{0,5}}}_D \right) + \frac{2\pi i}{3}$$

Posons  $u = \frac{2\pi i}{3} + L(D),$

les solutions deviennent alors

$$u_j = L(D) + \frac{2(j-1)\pi i}{3} \quad \text{pour } j \in \{1 \ 2 \ 3\} .$$

Il faut maintenant inverser le cheminement du processus pour retourner aux valeurs de h:

$$x_j = m \text{ sh } u_j \quad \text{pour } j \in \{1 \ 2 \ 3\}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \text{ sh } \left( \frac{2(j-1)\pi i}{3} + L(D) \right).$$

Un retour aux formules fondamentales s'impose:

$$\text{sh } (v + iw) = \text{sh } v \cos w + i \text{ ch } v \sin w$$

$$\text{sh } (LD) = 0,5 \times (e^{LD} - e^{-LD}) = \frac{D^2 - 1}{2D}$$

$$\text{ch } (LD) = 0,5 \times (e^{LD} + e^{-LD}) = \frac{D^2 + 1}{2D} .$$



### C.3 RACINES DE L'ÉQUATION

Alors

$$x_j = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \left( \text{sh} (LD) \cos \frac{2(j-1)\pi}{3} + i \text{ch} (LD) \sin \frac{2(j-1)\pi}{3} \right).$$

La première racine:  $j=1$

$$x_1 = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \quad \text{sh}(LD) = \sqrt{\frac{a}{3}} \left( \frac{D^2-1}{D} \right)$$

$$\text{car} \begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0. \end{cases}$$

La seconde racine:  $j=2$

$$x_2 = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \left( \text{sh}(LD) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \text{ch} (LD) \sin \left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \left( (-0,5 \text{ sh} (LD) + i 0,5 \sqrt{3} \text{ ch} (LD)) \right)$$

$$\text{car} \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0,5 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0,5 \sqrt{3} \end{cases}$$

$$= -\sqrt{\frac{a}{3}} \text{ sh} (LD) + i \sqrt{a} \text{ ch} (LD)$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2D} \left( -\sqrt{\frac{1}{3}} (D^2-1) + i (D^2+1) \right)$$

La dernière racine:  $j=3$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \left( \text{sh} (LD) \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) + i \text{ch} (LD) \sin \left( \frac{4\pi}{3} \right) \right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{3}} \quad (-0,5 \text{ sh} (LD) - 0,5\sqrt{3} i \text{ch} (LD))$$

car

$$\begin{cases} \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) = -\cos \left( \frac{4\pi}{3} - \pi \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = -0,5 \\ \sin \left( \frac{4\pi}{3} \right) = -0,5\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{a}}{2D} \left( \sqrt{\frac{1}{3}} (D^2-1) + i (D^2+1) \right)$$

#### C.4 SYNTHÈSE

Résumons la procédure à suivre:

$$x_1 = \sqrt{\frac{a}{3}} \left( \frac{D^2-1}{D} \right)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{a}}{2D} \left( -\sqrt{\frac{1}{3}} (D^2-1) + i (D^2+1) \right)$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{a}}{2D} \left( \sqrt{\frac{1}{3}} (D^2-1) + i (D^2+1) \right)$$

où  $x_j = m \text{ sh } u_j$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$

$$D = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \left( \frac{3}{a} \right)^{1,5} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27b^2 + 4a^3}{a}}}$$

$$a = \frac{1}{3} (3q-p^2)$$

$$b = \frac{1}{27} (2p^3 - 9pq + 27s).$$

Ainsi,

$$h_j = x_j - \frac{p}{3}$$

où

$$\left| \begin{array}{l} p = \frac{\beta_2 - \beta_3 H}{\beta_3} \\ q = \frac{\beta_1 - \beta_2 H}{\beta_3} \\ s = \frac{r_0 - \beta_1 H}{\beta_3} \end{array} \right.$$

### C.5 EXEMPLE DE CALCUL

Illustrons cette théorie par un exemple pour l'équation:

$$x^3 + ax + b = 0 \text{ en choisissant } x^3 - x + 2 = 0$$

où

$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow ab \neq 0$$

$$D = \sqrt[3]{-\frac{2}{2} \left(\frac{3}{-1}\right)^{1,5} + \frac{1}{2} \left(\frac{27 \times 4 - 4}{-1}\right)^{0,5}}$$

$$= \sqrt[3]{-\sqrt{-27} + \sqrt{-26}}$$

$$= \sqrt[3]{-\sqrt{27} \, i + \sqrt{26} \, i}$$

$$= \sqrt[3]{-9,713 \times 10^{-2} i} = \sqrt[3]{9,713 \times 10^{-2} i^3} \quad \text{car } i^3 \equiv -i$$

$$= 0,459675 i.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} D^2 &= -0,2113 \\ D^2+1 &= 0,788699 \\ D^2-1 &= -1,2113. \end{cases}$$

Les racines:

$$x_1 = \sqrt{\frac{a}{3}} \left( \frac{D^2-1}{D} \right) = \sqrt{\frac{-1}{3}} \frac{-1,2113}{0,459675i} = \frac{-1,2113i}{\sqrt{3} \times 0,459675i}$$

$$= -1,521389 : \text{ racine réelle}$$

$$x_2 = \frac{1}{2D} \left( -\sqrt{\frac{a}{3}} (D^2-1) + i \sqrt{a} (D^2+1) \right)$$

$$= \frac{(1,2113 \div \sqrt{3})i + 0,788699i^2}{2 \times 0,459675i}$$

$$= 0,7606947 + 0,8578876i : \text{ racine complexe.}$$

$$x_3 = \frac{-1}{2D} \left( \sqrt{\frac{a}{3}} (D^2-1) + i \sqrt{a} (D^2+1) \right)$$

$$= 0,7606947 - 0,8578876i : \text{ racine complexe}$$

Vérifions si chaque  $x_i$  se trouve vraiment une racine

de  $x^3 - x + 2 = 0$ :

$$x_1^3 - x_1 + 2 = -3,52144 + 1,521389 + 2 = -0,00051 \approx 0$$

$$\begin{aligned}x_2^3 - x_2 + 2 &= (-1,2393667 + 0,8578844i) - (0,7606947 + 0,8578876i) + 2 \\&= -0,0000614 - 0,0000032i \approx 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3^3 - x_3 + 2 &= (-1,2393667 - 0,8578844i) - (0,7606947 - 0,8578876i) + 2 \\&= -0,0000614 + 0,0000032i \approx 0.\end{aligned}$$

Premier tirage, janvier 1981  
Deuxième tirage, juin 1985  
Deuxième édition, juin 1989



Le ministère de l'Énergie et des Ressources (Forêts) est responsable de l'administration et de la gestion des forêts publiques dans l'intérêt général du Québec. Le Ministère doit donc se préoccuper de l'évaluation précise du patrimoine forestier pour le développement socio-économique de la population. L'inventaire dendrométrique de cette ressource importante nécessite la mise au point de méthodes scientifiques pour le cubage individuel des arbres, ce dernier débouchant sur la construction de tarifs pour l'utilisation optimale de nos bois. La Direction de la recherche et du développement et les trois Services qui la composent contribuent ainsi à approfondir la connaissance du milieu forestier du Québec, à assurer un approvisionnement continu aux générations futures et à asseoir la foresterie sur une base plus scientifique.



Gouvernement du Québec  
Ministère de l'Énergie  
et des Ressources (Forêts)  
Direction de la recherche  
et du développement

ISBN 2-550-19679-1  
O.D.C 524(047.3)(714)  
L.C. SD 555

MER 5310-69